Discernabilité des systèmes dynamiques affines en la commande

K.M.D. MOTCHON, K.M. PEKPE, J-P. CASSAR, S. DE BIÈVRE

15 septembre 2016

Plan de la présentation

1.INTRODUCTION

Du FDI à la discernabilité des systèmes

- Problème de détectabilité des défauts :

$S_1 \equiv$ Mode de fonctionnement normal

$S_2 \equiv$ Mode de fonctionnement défaillant

S_1 et S_2 ont le même comportement entrée-sortie $\Longrightarrow$ **Défaut S_2 non détectable**

- Problème d'isolabilité des défauts :

$S_1 \equiv$ Mode défaillant N° 1

$S_2 \equiv$ Mode défaillant N° 2

S_1 et S_2 ont le même comportement entrée-sortie $\Longrightarrow$ **Les deux défauts ne sont pas isolables**

Du FDI à la discernabilité des systèmes

Modes de fonctionnnement normal et défaillant ont le même comportement entrée-sortie

Modes de fonctionnnement défaillants ont le même comportement entrée-sortie

Algorithme de FDI

Pas de Résultats

Nécessité de caractériser la propriété des systèmes à avoir des comportements entrées-sorties différents ou identiques

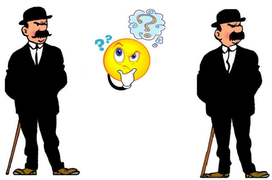
Propriété de deux systèmes à avoir des comportements entrée-sortie identiques ou différents $\Longleftrightarrow$ Discernabilité des deux systèmes

État de l'art

Deux grandes questions de discernabilité

Discernabilité contrôlable

- Existence d'une commande qui produit des sorties différentes
- Exemple :



Commande=Question ; Sortie=Réponse

Problème : Existe t-il une question à laquelle Dupond et Dupont répondent différemment

Discernabilité stricte

- Générer des sorties différentes quelque soit la commande
- Exemple

Commande=Question ; Sortie=Réponse

Problème : Capitaine Haddock et Tintin répondront-ils différemment à toutes les questions

État de l'art

	Référence	Systèmes dynamiques		Caractérisation de la discernabilité
		Linéaires	Non-linéaires	
Disc. contrôlable	Grewal and Glover (1976)	√		algébrique
	Babaali and Pappas (2004)	√		
	Gómez-Gutiérrez *et al.* (2012)	√		géométrique
	Baglietto *et al.* (2013,2014)	√	√	
	Cocquempot *et al.* (2003,2004) Domlan *et al.* (2007)	√		Utilisation des résidus de parité
Disc. stricte	Lou and Si (2009,2014)	√		algébrique
	Lou and Yang (2011)	√		
	Gómez-Gutiérrez *et al.* (2010)	√		
	Rosa and Silvestre (2011)	√		

2.DISCERNABILITÉ STRICTE DES SYSTÈMES AFFINES EN LA COMMANDE

Modèle d'état des systèmes

Systèmes affines en la commande

$$S_i \quad \begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + g_i(x_i(t))\, u(t) \\ y_i(t) = h_i(x_i(t)) \\ x_i(0) = x_i^o \end{cases}$$

- $f_i \equiv$ Champ de vecteurs, $g_i \equiv$ Fonction vectorielle et $h_i \equiv$ Fonction de mesure
- $\mathscr{X}_i^o \equiv$ Domaine des états initiaux du système S_i
- $\mathscr{U} \equiv$ Espace des commandes admissibles u conjointement appliquées à S_1 et à S_2

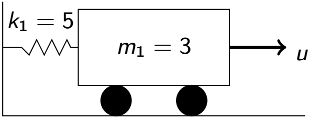
Hypothèses

- $0_n \in \mathscr{X}_i^o$ et $0_{\mathscr{U}} \in \mathscr{U}$
- $(\mathbf{x}^\star = 0_n, \mathbf{u}^\star = 0_{\mathscr{U}})$ est un point de fonctionnement de S_i : $f_i(0_n) = 0_n$ et $h_i(0_n) = 0_m$

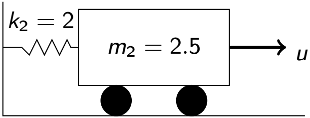
Zone d'indiscernabilité

Zone d'indiscernabilité ([Motchon *et al.*, 2015])

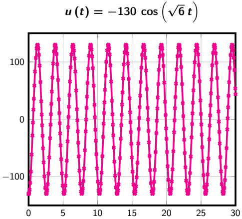
$$\mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) = \left\{ (x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{X}_1^o \times \mathscr{X}_2^o \times \mathscr{U} : y_1(\cdot, x_1^o, u) \underset{\mathbb{R}_+}{=} y_2(\cdot, x_2^o, u) \right\}$$

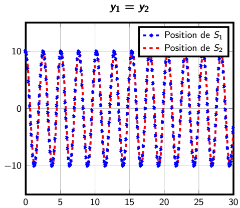


(a) Système S_1



(b) Système S_2





$$u(t) = -130\cos\left(\sqrt{6}\,t\right)$$

$$x_1^o = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2^o$$

$$(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2)$$

Discernabilité stricte et zone d'indiscernabilité

Discernabilité stricte ([Lou and Si, 2009])

On dit que S_1 et S_2 sont strictement discernables s'ils génèrent des sorties différentes quelque soit la commande et les états initiaux non triviaux de S_1 et S_2.

Discernabilité stricte : définition équivalente ([Motchon *et al.*, 2015])

S_1 et S_2 sont strictement discernables si $\boxed{\mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) = \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}}$

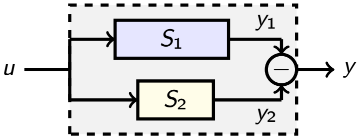
Deux étapes pour caractériser la discernabilité stricte

- Déterminer la zone d'indiscernabilité
- Étudier la trivialité de la zone d'indiscernabilité

De la zone d'indiscernabilité au problème d'annulation de sortie

- Système augmenté S associé à S_1 et S_2

$$S\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_2) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}(x)} u \\ y = \underbrace{h_1(x_1) - h_2(x_2)}_{\boldsymbol{h}(x)} = y_1 - y_2 \\ x(0) = \begin{bmatrix} (x_1^o)^\top & (x_2^o)^\top \end{bmatrix}^\top \end{cases}$$



La sortie de S est l'écart des sorties de S_1 et S_2

- Définition équivalente de la zone d'indiscernabilité :

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) &= \{(x_1^o, x_2^o, u) : y_1(\cdot, x_1^o, u) = y_2(\cdot, x_2^o, u)\} \\ &= \{(x_1^o, x_2^o, u) : y(\cdot, x_1^o, x_2^o, u) = 0_m\} \end{aligned}$$

- Détermination de $\mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) \iff$ Problème d'annulation de la sortie

Degré relatif du système augmenté

- **Opérateurs différentiels** :
  - $L_f \boldsymbol{h}(\xi) = \langle \boldsymbol{f}(\xi), \nabla \boldsymbol{h}(\xi) \rangle = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \xi_k}(\xi)\, \boldsymbol{f}_k(\xi)$: dérivée directionnelle de $\boldsymbol{h}$ dans la direction de $\boldsymbol{f}$
  - $\forall r \geq 1,\ L_f^r \boldsymbol{h}(\xi) = L_f L_f^{r-1} \boldsymbol{h}(\xi)$
  - $\forall r \geq 1,\ \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_f^r \boldsymbol{h}(\xi) = \begin{bmatrix} L_{\boldsymbol{g}^1} L_f^r \boldsymbol{h}(\xi) & L_{\boldsymbol{g}^2} L_f^r \boldsymbol{h}(\xi) & \cdots & L_{\boldsymbol{g}^l} L_f^r \boldsymbol{h}(\xi) \end{bmatrix}$
- **Degré relatif du système augmenté** :

$$\boldsymbol{\rho} = \text{degré relatif de } S \text{ sur } \boldsymbol{\Omega} \iff \begin{cases} \forall \xi \in \boldsymbol{\Omega},\ \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_f^{k-1} \boldsymbol{h}(\xi) = 0_{1\times l},\ 1 \leq k \leq \boldsymbol{\rho} - 1 \\ \forall \xi \in \boldsymbol{\Omega},\ \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_f^{\rho-1} \boldsymbol{h}(\xi) \neq 0_{1\times l} \end{cases}$$

Cas linéaire : $\boldsymbol{\rho}$ est tel que $C\,A^{k-1}\,B = 0_{1\times l}$, $1 \leq k \leq \boldsymbol{\rho} - 1$ et $C\,A^{\rho-1}\,B \neq 0_{1\times l}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n \\ 0_n & A_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix}$$

- **Valeurs admissibles de** $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\rho} \in \{1, 2, \ldots, 2n\}}$$

Résolution du problème d'annulation de sortie

- "Linéarisation" partielle (**Forme normale**) de S : $z(t) = F(x(t)) \in \mathbb{R}^{2n} \implies$

$$S \begin{cases} \boxed{\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{\rho-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_\rho(t) \end{bmatrix}} \longleftarrow \text{Dynamique linéaire} \\ \boxed{\dot{\widehat{z}}(t) = G_1(z(t)) + G_2(z(t))\, u(t)} \longleftarrow \text{Dynamique non-linéaire} \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z(t) = z_1(t) \end{cases}$$

avec $\widehat{z}(t) = \begin{bmatrix} z_\rho(t) & \cdots & z_{2n}(t) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{2n-\rho+1}$

- D'après la forme "linéarisée",

$$\begin{aligned} y \equiv 0 \quad & \implies \quad z_1 \equiv 0 \\ & \implies \quad z_2 = \dot{z}_1 \equiv 0 \\ & \quad \vdots \\ & \implies \quad z_\rho = \dot{z}_{\rho-1} \equiv 0 \\ & \implies \quad \dot{z}_\rho = L_f^\rho \boldsymbol{h}\left(F^{-1}(z)\right) + \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_f^{\rho-1} \boldsymbol{h}\left(F^{-1}(z)\right) u \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{z = (0_\rho, \eta)}$$

Résolution du problème d'annulation de sortie

- Commandes u qui annulent la sortie de S

$$z = (0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta)\ ;\ z = F(x)\ ;\ L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}(z)\right) + \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}(z)\right)\ u \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta)\right) + \mathbb{L}_{\boldsymbol{g}} L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}(0_{\boldsymbol{\rho}}, \eta)\right)\ u \equiv 0 \\ \dot{\eta} = \varphi(\eta) \quad \text{et} \quad \eta(0) = \widehat{\varphi}(x_1^o, x_2^o) \end{array}}$$

- Condition sur les états initiaux qui annulent la sortie de S

$$\boxed{\Psi_{\boldsymbol{\rho}}(x_1^o, x_2^o) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}(x_1^o, x_2^o) \\ L_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{h}(x_1^o, x_2^o) \\ \vdots \\ L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}\boldsymbol{h}(x_1^o, x_2^o) \end{bmatrix} = 0_{\boldsymbol{\rho}}}$$

Discernabilité stricte : Cas $\rho = 2n$

- Zone d'indiscernabilité :

classe	$(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2)$	
	Condition sur x_1^o et x_2^o	Condition sur u
SISO et MISO	$x_1^o = x_2^o = 0_n$	$\mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h(0_{2n})\ u \equiv 0$

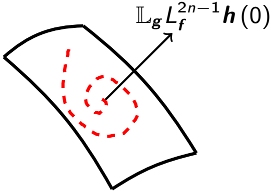
- Définition du degré relatif $\Longrightarrow$

$$\mathbb{R}^{1\times l} \ni \mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h(0_{2n}) \neq 0_{1\times l}, \qquad l \equiv \text{nombre d'entrées}$$

- Cas SISO ($l = 1$) : $\mathbb{L}_g L_f^{2n-1} h(0_{2n})\ u \equiv 0 \iff u \equiv 0$

$$\boxed{l = 1 \Longrightarrow \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) = \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}}$$

- Cas MISO ($l > 1$) :



$$\boxed{l > 1 \Longrightarrow \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}}$$

Discernabilité stricte : Cas $1 \leq \rho \leq 2n-1$

- Zone d'indiscernabilité :

classe	$(x_1^o, x_2^o, u) \in \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2)$	
	Condition sur x_1^o et x_2^o	Forme de u
SISO et MISO	$\Psi_\rho(x_1^o, x_2^o) = 0_\rho$	$u = \mathbf{u}^{\text{hom}}[\eta] + \mathbf{u}^{\text{par}}[\eta]$ $\dot{\eta} = \varphi(\eta),\ \eta(0) = \widehat{\varphi}(x_1^o, x_2^o)$

- Dans ce cas, on a

$$\boxed{l \geq 1 \implies \mathscr{Z}_{\text{ind}}(S_1, S_2) \neq \{(0_n, 0_n, 0_{\mathscr{U}})\}}$$

- Justification rigoureuse basée sur des outils de géométrie différentielle

Conditions de discernabilité stricte

Théorème ([Motchon *et al.*, 2015])

Si S_1 **et** S_2 **sont des systèmes mono-sortie** alors, sous des hypothèses techniques sur les fonctions f_i, g_i et h_i, $i = 1, 2$, les systèmes S_1 et S_2 sont strictement discernables **si et seulement si** $\boxed{l = 1 \text{ et } \rho = 2n}$

- Dans le cas linéaire, ρ est tel que

$$\boxed{C\,A^{k-1}\,B = 0_{1\times l},\ 1 \le k \le \rho - 1 \text{ et } C\,A^{\rho-1}\,B \neq 0_{1\times l}}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_n \\ 0_n & A_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix}$$

Corollaire ([Motchon *et al.*, 2015])

Si S_1 **et** S_2 **sont des systèmes linéaires mono-sortie** alors, S_1 et S_2 sont strictement discernables **si et seulement si**

$$\boxed{l = 1,\ C\,A^{2n-1}\,B \neq 0_{1\times l}, \text{ et } C\,A^{k-1}\,B = 0_{1\times l},\ \forall k = 1, 2, \ldots, 2n-1}$$

Exemple 1

- S_1 et S_2 deux pendules : $m_1 = m_2 = m$ et $L_1 \neq L_2$

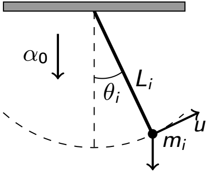


Figure: Pendule S_i

$$S_i \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_i(t) \\ \ddot{\theta}_i(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_i(t)} = \underbrace{\frac{1}{m\,L_i} \begin{bmatrix} m\,L_i\,\dot{\theta}_i(t) \\ -\alpha_0\,m\sin(\theta_i(t)) - \mu_i\,L_i\,\dot{\theta}_i(t) \end{bmatrix}}_{f_i(x_i(t))} + \underbrace{\frac{1}{m\,L_i^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_i(x_i(t))} u(t) \\ y_i(t) = \theta_i(t) =: h_i(x_i(t)) \end{array} \right.$$

- Degré relatif du système augmenté : $\boldsymbol{\rho} = 2$
- $n = 2$, $\boldsymbol{\rho} = 2 \implies \boldsymbol{\rho} \neq 2n \implies S_1$ et S_2 ne sont pas strictement discernables

Exemple 1

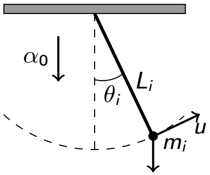


Figure: Pendule S_i

- Commande d'indiscernabilité :

$$L_{\boldsymbol{f}}^{\rho}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}\left(0_{\rho},\eta\right)\right)+\mathbb{L}_{\boldsymbol{g}}L_{\boldsymbol{f}}^{\rho-1}\boldsymbol{h}\left(F^{-1}\left(0_{\rho},\eta\right)\right)\ u\equiv 0,\ \dot{\eta}=\varphi\left(\eta\right)\text{ et }\eta\left(0\right)=\widehat{\varphi}\left(x_1^o,x_2^o\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u\left(t\right)=K_1\ \sin\left(\eta_1\left(t\right)\right)+K_2\,\eta_2\left(t\right),\ \begin{bmatrix}\dot{\eta}_1\\ \dot{\eta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_2\\ \widehat{K}\ \sin\left(\eta_1\right)+\widetilde{K}\,\eta_2\end{bmatrix}\text{ et }\eta\left(0\right)=x_2^o}$$

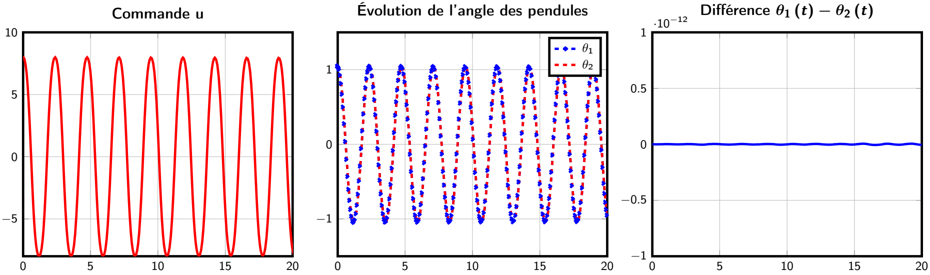
- États initiaux qui rendent les sorties de S_1 et S_2 indiscernables :

$$\Psi_{\rho}\left(x_1^o,x_2^o\right)=0_{\rho}\implies\boxed{x_1^o=x_2^o}$$

Exemple 1

$$\boxed{u(t) = K_1 \sin(\eta_1(t)) + K_2\,\eta_2(t),\ \begin{bmatrix}\dot\eta_1\\ \dot\eta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\eta_2\\ \widehat{K}\sin(\eta_1) + \widetilde{K}\,\eta_2\end{bmatrix} \text{ et } \eta(0) = x_2^o}$$

- $x_1^o = x_2^o = \begin{bmatrix}\frac{\pi}{3} & 0\end{bmatrix}^\top$, $m = 3$, $L_1 = 0.57$, $L_2 = 0.67$, $\mu_1 = 0.0138$ et $\mu_2 = 0.01$



Exemple 2

- Systèmes masse-ressort S_1 et S_2 : $m_1 \neq m_2$ ou $k_1 \neq k_2$

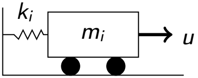


Figure: Système S_i

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_i}{m_i} & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_i} \end{bmatrix} \; ; \; C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcul du degré relatif ρ du système augmenté

$$\boxed{C\,A^{k-1}\,B = 0_{1\times l},\ 1 \leq k \leq \rho - 1 \text{ et } C\,A^{\rho-1}\,B \neq 0_{1\times l}}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_2 \\ 0_2 & A_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix}$$

On obtient dans ce cas

$$C\,B = 0 = C\,A^2\,B \quad ; \quad C\,A\,B = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \quad ; \quad C\,A^3\,B = \frac{k_2}{m_2^2} - \frac{k_1}{m_1^2}$$

Donc $\rho = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad m_1 \neq m_2 \\ 4 & \text{si} \quad m_1 = m_2 \text{ et } k_1 \neq k_2 \end{cases}$

- S_1 et S_2 sont strictement discernables si et seulement si $m_1 = m_2$ et $k_1 \neq k_2$

3. CONCLUSION

Conclusion

- Formule explicite des commandes qui génèrent des sorties identiques
- Généralisation de la caractérisation de la discernabilité stricte au cas non-linéaire

Seuls les systèmes SISO dont le système augmenté a un degré relatif égal à $2n$ (ordre du système) sont strictement discernables

Merci pour votre attention