Temps disponible pour la reconfiguration d'un système suite à la perte de capteurs

RTBNE : Remaining Time Before Non-Estimability

Pierre-Emmanuel DUMONT[1], Abdel AITOUCHE[1], Mireille BAYART[2]

LAGIS UMR CNRS 8146

[1] *Hautes Etudes d'Ingénieur, 59046, Lille, France*

abdel.aitouche@hei.fr , *pierre-emmanuel.dumont@hei.fr*

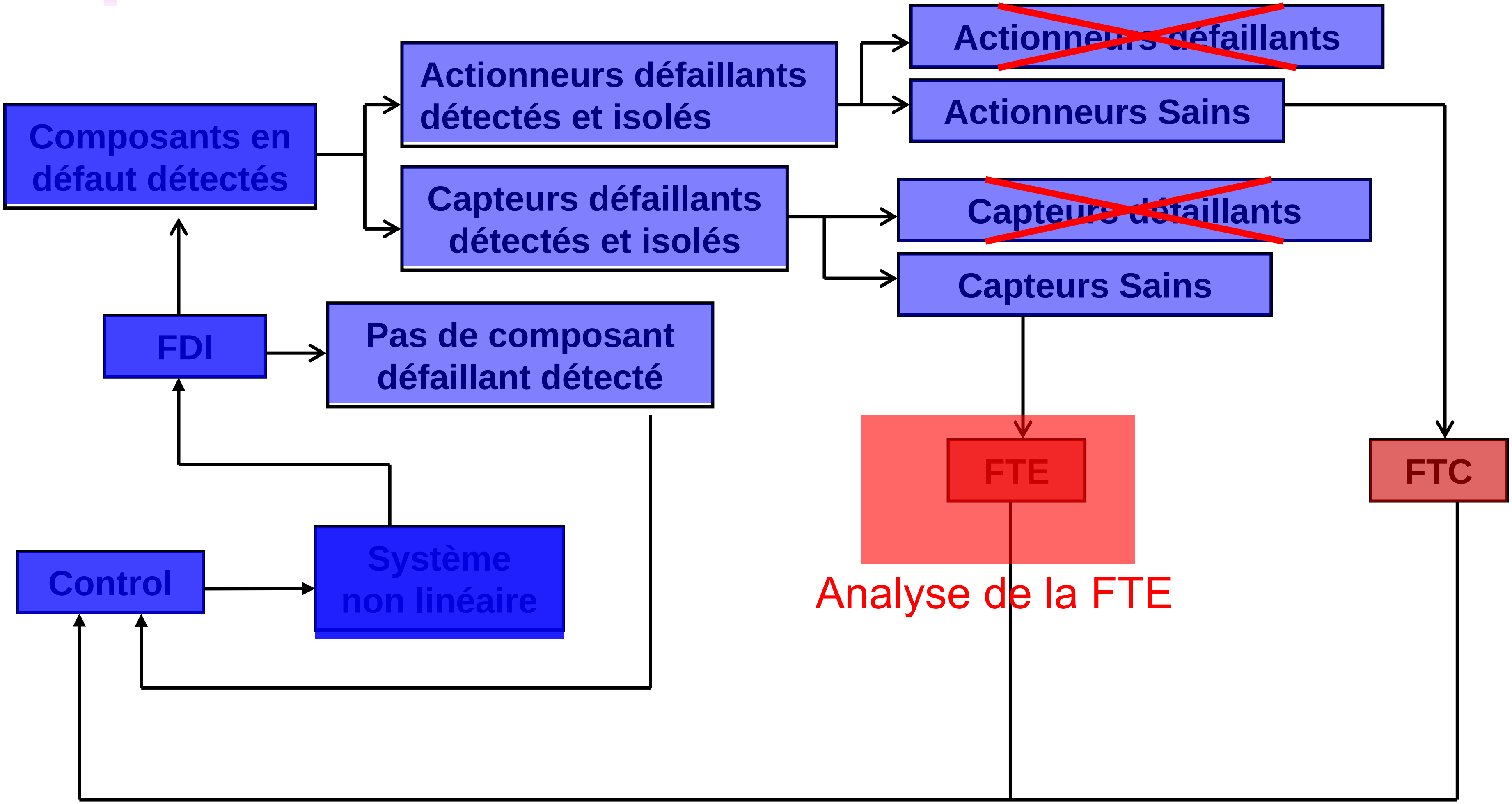
[2] *Université Scientifique et Technologique de Lille, Cité Scientifique, 59655, Villeneuve d'Ascq, France*

Mireille.bayart@univ-lille1.fr

GT S³ 27 septembre 2006

Sommaire

1) Introduction



1) Introduction

Considérons un système non linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \\ \boxed{z(t) = e(x(t))} \end{cases}$$

où $x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$, le vecteur d'entrée, $y \in R^p$, le vecteur de sortie

et $z \in R^q$ une partie de l'état à estimer

f, e et h sont des fonctions de dimension appropriée

La mise en place d'un module de FTE nécéssite une analyse de l'évolution des propriétés d'observabilité suite au différents cas possibles de panne de capteurs

- L'observabilité non linéaire
- Le graphe d'évolution de l'observabilité
- Les notions de redondance et de minimalité
- L'évaluation structurelle

L'existant sur l'analyse de la FTE

- Le RTBNE → Un nouveau concept

Sommaire

1. Introduction

2. L'existant sur l'analyse de la tolérance aux fautes du point de vue des capteurs

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

5. Application sur l'exemple initial

6. Conclusion et perspectives

2. L'existant sur l'analyse de la tolérance aux fautes du point de vue des capteurs

Cette partie est divisée en 4 paragraphes:

2.1 Observabilité d'un système non linéaire

2.2 Le graphe d'évolution de l'observabilité

2.3 Redondance et Minimalité

2.4 Analyse de la capacité d'un système à tolérer les fautes

➔ Evaluation structurelle: degré de redondance

2.1 Observabilité d'un système non linéaire

Pourquoi étudier l'observabilité d'un système non linéaire au lieu d'étudier les propriétés d'observabilité pour le système linéarisé autour d'un point de fonctionnement ?

Après linéarisation, certaines propriétés d'observabilité peuvent être perdues.

2.1 Observabilité d'un système non linéaire

Continuons avec le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \\ z(t) = e(x(t)) \end{cases}$$ avec

$x \in R^n$ est le vecteur d'état, $u \in R^m$, le vecteur d'entrée, $y \in R^p$, le vecteur de sortie

et $z \in R^q$ une partie de l'état à estimer

f, e et h sont des fonctions de dimension appropriée

Le système est génériquement observable (Hermann et Krener,1977) ssi :

$$rank\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f h}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f^{n-1} h}{\partial x} \end{bmatrix}\right\} = n$$

La fonctionnelle e est génériquement observable si et seulement si:

$$\boxed{span\left(\frac{\partial e}{\partial x}\right)} \subseteq \boxed{span\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f h}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f^{n-1} h}{\partial x} \end{bmatrix}\right\}}$$

Espace recouvert par la fonctionnelle

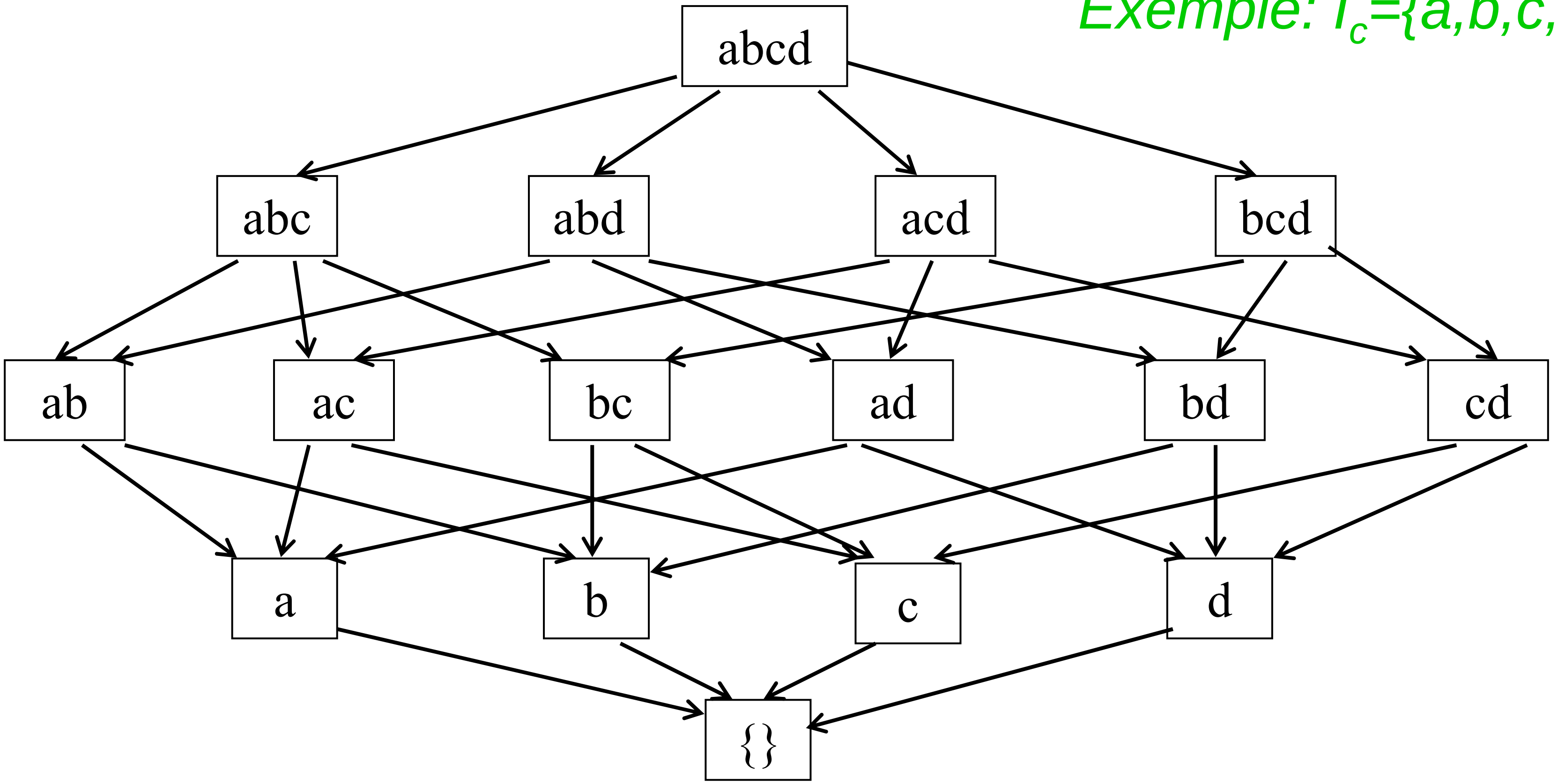
Espace recouvert par l'ensemble de capteurs

$\bar{L}_f h$ est la dérivé de Lie de g le long du champ de vecteur f.

2.2 Le graphe d'évolution de l'observabilité

Représentons d'abord l'ensemble de capteurs nominal I_c dans un graphe biparti et tous les sous-ensembles de I_c :

Exemple: I_c={a,b,c,d}



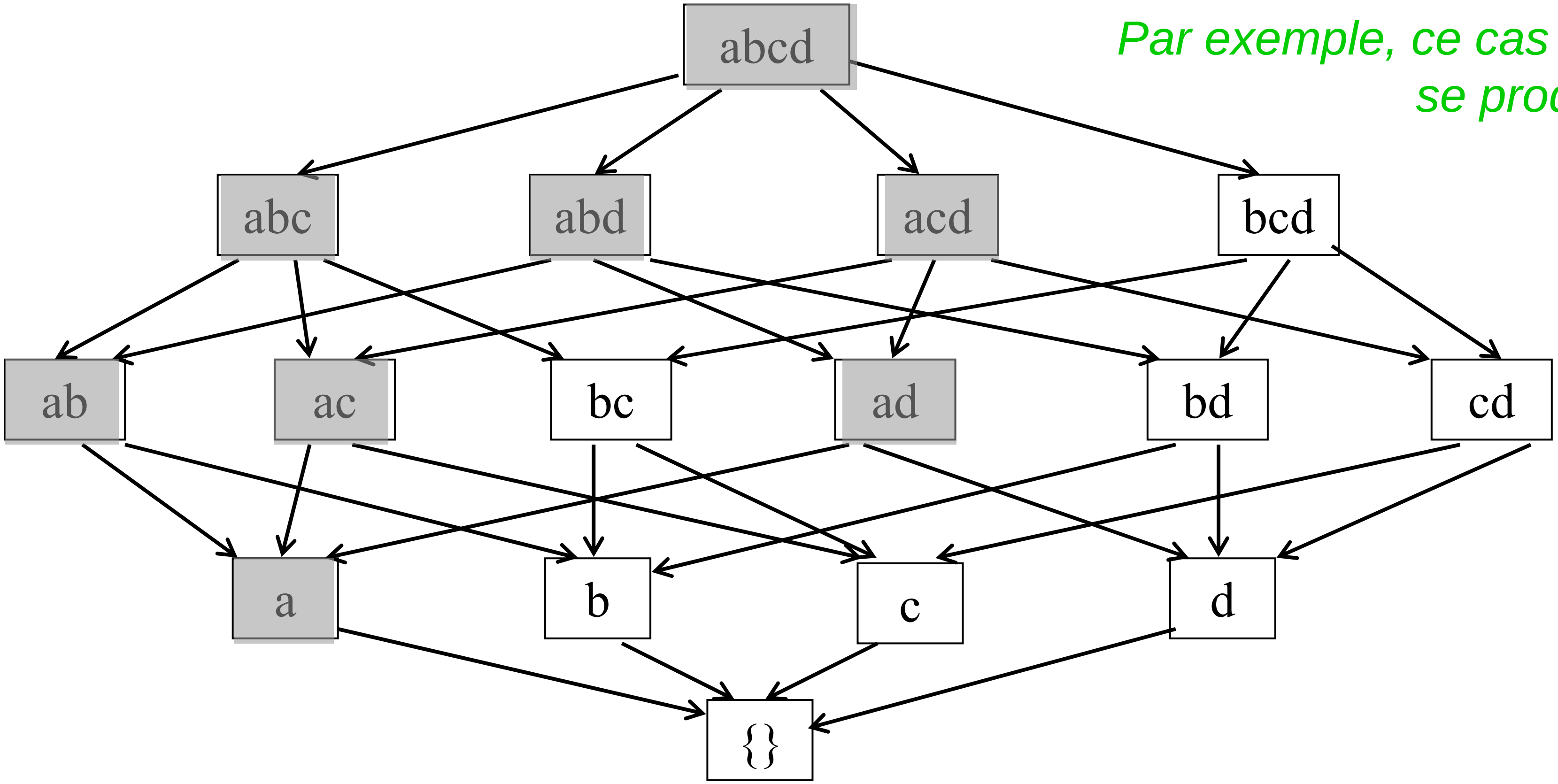
2.2 Le graphe d'évolution de l'observabilité

Déterminons maintenant avec quels sous-ensembles de capteurs du graphe d'évolution de l'observabilité, la fonctionnelle est observable.

➔ Utilisation de la méthode du paragraphe précédent

Ces sous-ensembles de capteurs sont coloriés en gris:

Par exemple, ce cas peut se produire



Ces sous-ensembles grisés permettent de remplir l'objectif: observer la fonctionnelle

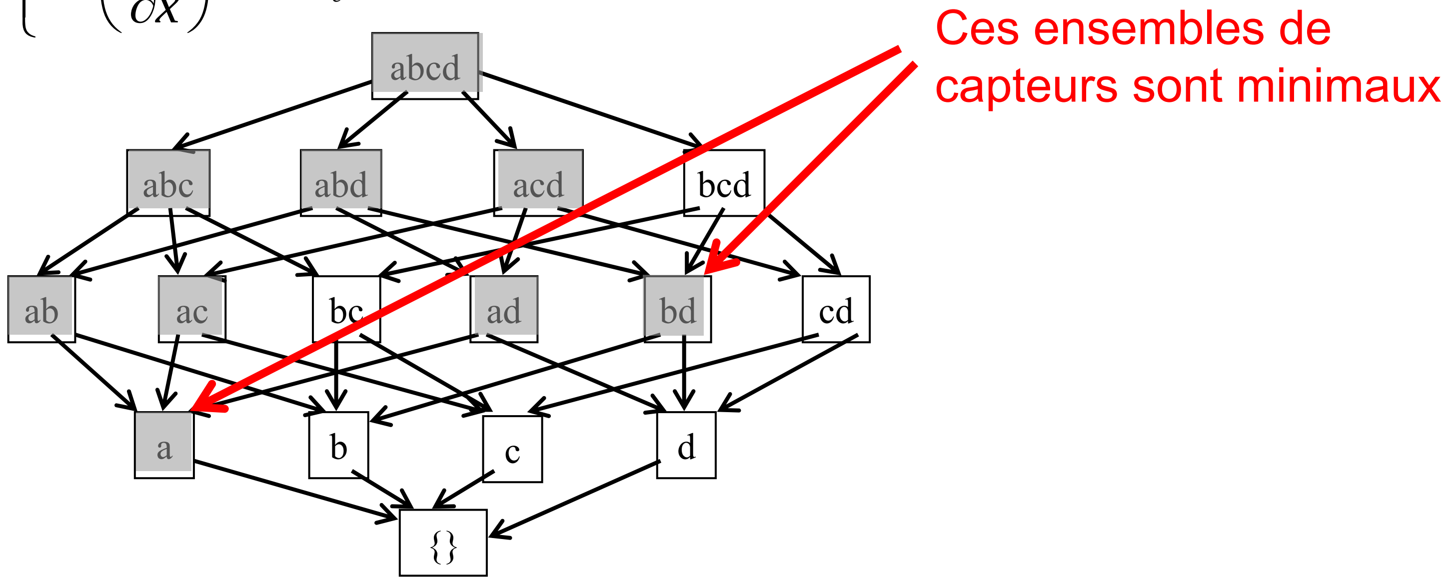
Mais, pour chacun d'eux, avec quelle marge de sécurité l'objectif est-il rempli ?

2.3 Redondance et Minimalité

Un ensemble de capteurs *Ic* est dit minimal si et seulement si :

$$\forall J \subset I_c, \begin{cases} \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial e}{\partial x}\right) \subset \Omega_{I_c} \\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial e}{\partial x}\right) \not\subset \Omega_{I_c \backslash J} \end{cases}$$

où Ω_{I_c} est l'espace recouvert par l'ensemble de capteurs *Ic*



Avec ces ensembles de capteurs, l'objectif d'observer la fonctionnelle peut être rempli, mais la marge de sécurité est nulle

En effet, La perte d'un capteur d'un ensemble minimal rend $z(t)$ non observable

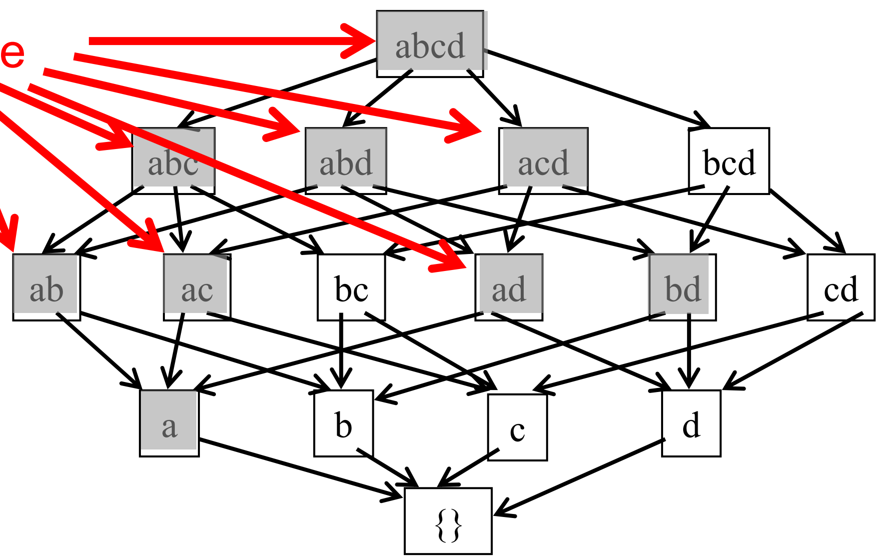
2.3 Redondance et Minimalité

Un ensemble de capteurs *Ic* est dit redondant si et seulement si :

$$\exists J \subset I_c \ (\text{avec J} \neq \text{I}_\text{c}),\ tel\text{ que } Span\left(\frac{\partial e}{\partial x}\right) \subseteq \Omega_{I_c \setminus \text{J}}$$

où Ω_{I_c} est l'espace recouvert par l'ensemble de capteurs *Ic*.

Ces sous-ensembles de capteurs sont redondants



La perte d'un capteur d'ensemble redondant peut conduire soit à un autre ensemble redondant, soit à un ensemble minimal ou enfin à un ensemble insuffisant (c'est à dire un ensemble rendant *z(t)* non observable)

2.4 Analyse de la capacité d’un système à tolérer les fautes Evaluation structurelle

Dans la phase d’analyse de la capacité d’un système à tolérer les fautes de capteurs, nous cherchons à répondre à plusieurs questions:

- Que se passe-t-il à l’apparition d’un défaut de capteurs ?
- Peut-on continuer à observer la fonctionnelle ? Avec quelle marge de sécurité ?

Plusieurs méthodes existent pour analyser la capacité d’un système à tolérer les fautes:

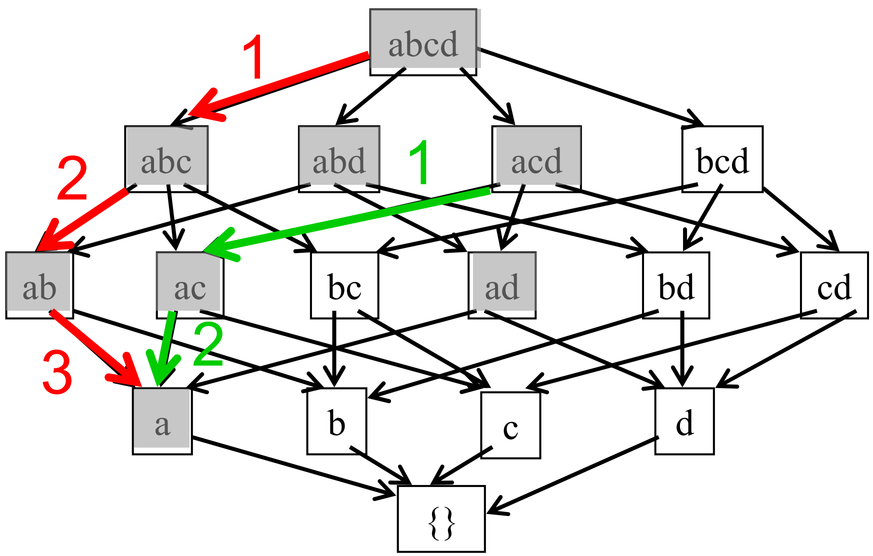
Nous en verrons une :

L’évaluation structurelle: les degrés de redondance

4.4 Analyse de la capacité d'un système à tolérer les fautes
Evaluation structurelle

- Le degré de redondance faible (d_f) (Hoblos et al.,2000)

Le degré de redondance faible $d_f(J,z)$ associé à la paire *(J,z)* est le nombre maximal de capteurs *J* qui peuvent être perdus tout en gardant *z* observable.



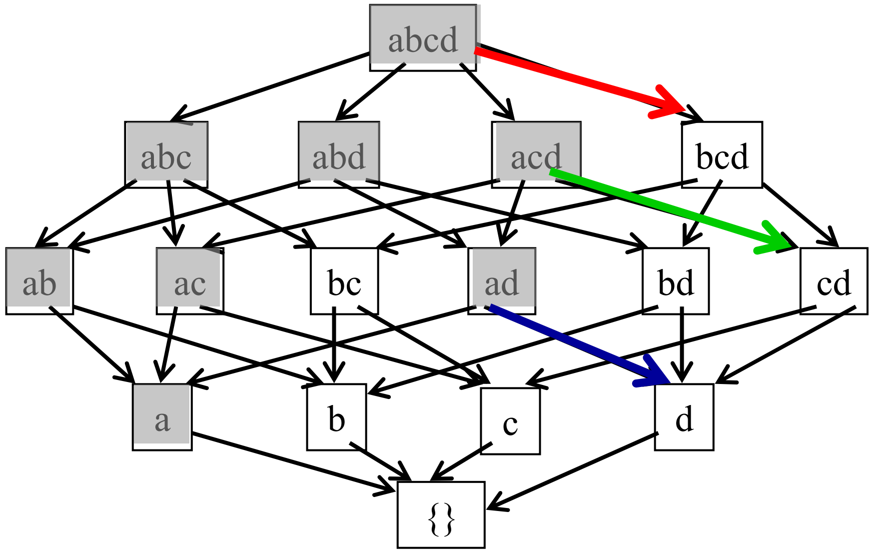
Exemple :

$d_f(\{a,b,c,d\},z)=3$

$d_f(\{a,c,d\},z)=2$

- Le degré de redondance fort (d_F)

Le degré de redondance fort $d_F\left(J,z\right)$ associé à la paire *(J,z)* est le nombre maximal de capteurs indifférenciés *J* qui peuvent être perdus tout en gardant z observable



Exemple :

$d_F(\{a,b,c,d\},z)=0$

$d_F(\{a,c,d\},z)=0$

$d_F(\{a,d\},z)=0$

Sommaire

1. Introduction
2. L'existant sur l'analyse de la tolérance aux fautes du point de vue des capteurs
3. Introduction au RTBNE à travers un exemple
4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique
5. Application sur l'exemple initial
6. Conclusion et perspectives

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

Afin de connaître la capacité d’un système à tolérer les fautes, une nouvelle question peut-être posée ?

A l’apparition d’un défaut de capteur, de combien de temps disposons nous, avant la perte de la propriété d’« estimabilité » de la fonctionnelle?

Ce temps, que nous appelons, RTBNE (remaining Time Before Non-estimability), est le temps dont nous disposons pour détecter et localiser un défaut de capteurs (génération de résidus) en étant sûr que la fonctionnelle reste estimable.

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

Prenons l'exemple d'un système linéaire discret :

$$x(k+1) = A.x(k) + B.u(k)$$
$$y(k) = C.x(k)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y(k) = C.x(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.x(k) = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$

$$B = 0$$

Ainsi:
$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_6(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \\ x_4(k+1) = x_5(k) \\ x_5(k+1) = 2.x_1(k) \\ x_6(k+1) = x_2(k) \end{cases}$$

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_6(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \\ x_4(k+1) = x_5(k) \\ x_5(k+1) = 2.x_1(k) \\ x_6(k+1) = x_2(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(k) = x_2(k) = x_1(k-1) = -x_2(k-2) + x_6(k-2) = -x_1(k-3) + x_2(k-3) \\ y_2(k) = x_3(k) = x_2(k-1) = x_1(k-2) = -x_2(k-3) + x_6(k-3) \\ y_3(k) = x_4(k) = x_5(k-1) = 2x_1(k-2) = -2x_2(k-3) + x_6(k-3) \end{cases}$$

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

Pour une fenêtre d'observation de taille 3, le RTBNE du capt. 3, est donc de 1 période d'échantillonnage.

Instant k+2	Instant k+1	Instant k	Instant k-1	Instant k-2
$x_2(k+2)$	$x_2(k+1)$	$x_2(k)$	$x_1(k-1)$	$x_6(k-2)$
$x_3(k+2)$	$x_3(k+1)$	$x_3(k)$	$x_5(k-1)$	
	$x_1(k+1)$	$x_4(k)$	$x_6(k-1)$	
		$x_1(k)$		
		$x_6(k)$		
		1	**2**	**3**

Taille de la fenêtre d'observation

3. Introduction au RTBNE à travers un exemple

Nous faisons la même chose avec les autres capteurs :

- pour le capteur 3, le RTBNE est de 1 période
- pour le capteur 2, le RTBNE est de 2 périodes pour le capteur 1, le RTBNE est de 3 périodes

➔ attention, la dernière phrase est inexacte, si RTBNE = taille de la fenêtre d'observation, nous avons un RTBNE pour le capteur 1 qui est infini. Le système reste estimable sans ce capteur.

Le RTBNE de l'ensemble de capteur {1,2,3} est de

Min (RTBNE de chaque capteur) = 1 période

Si nous perdons un capteur, quelqu'il soit, entre l'instant k et l'instant k+1, le système restera estimable à l'intérieur de la fenêtre d'observation au moins à l'instant k+1

Sommaire

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t) \\ z(t) = e(x(t)) \end{cases}$$

Objectif : calcul du RTBNE d'une fonctionnelle e de l'état pour l'ensemble de capteurs y(t)

<u>Calcul des indices de pseudo-observabilité (Bingulac et Krtolica,1987;Staroswiecki et al., 1999) par rapport à e :</u>

Un vecteur μ tel que $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p), 0 \le \mu_i \le q, \sum_{i=1}^{p} \mu_i = q$ où $z \in R^q$

est un vecteur d'indice de pseudo-observabilité par rapport à e

Si p=2 et q=3:

(0 3)

(1 2)

(2 1)

(3 0)

sont les quatre vecteurs de pseudo-observabilité par rapport à e

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Un vecteur d'indice de pseudo-observabilité μ est dit admissible si est seulement si :

$$OBS(I,\mu) = \left(OBS(1,\mu_1);\quad OBS(2,\mu_2);\quad ....;\quad OBS(p,\mu_p)\right)$$

satisfait la condition : $$rank\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ OBS(I,\mu) \end{bmatrix} = rank\left[OBS(I,\mu)\right]$$

où $OBS(i,\alpha) = [\ ]$ si ♋ =0

$OBS(i,\alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix}$ si ♋ =1

$$OBS(i,\alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f h_i}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \bar{L}_f^{\alpha-1} h_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$ si ♋ >1

Exemple: (1 2)

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

A chaque vecteur d'indice de pseudo-observabilité, on associe la norme :

$$\| \mu \| = \max_{i \in I_c} \mu_i$$

exemple ~~(0 3)~~ $\longrightarrow$ $\cancel{\| \mu \| = 3}$ Non admissible

(1 2) $\longrightarrow$ $\| \mu \| = 2$

(2 1) $\longrightarrow$ $\| \mu \| = 2$

(3 0) $\longrightarrow$ $\| \mu \| = 3$

$$\mu^*(I_s) = \min_{\mu_E \in M(I_s)} \| \mu \| = 2$$

Ce dernier représente la taille minimale de la fenêtre d'observation

Pour déterminer $\mu^*(I_s)$, nous ne considérons que les vecteurs d'indice de pseudo observabilité qui sont admissibles et $\mu^*(I_s) = \min_{\mu_E \in M(I_s)} \| \mu \|$

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

A chaque capteur i, un vecteur μ^i est associé :

$$\mu^i = \{\mu(i), \mu \in M(I_s)\}$$

~~$(0 \quad 3) \longrightarrow \| \mu \| = 3$~~ Non admissible

$(1 \quad 2) \longrightarrow \| \mu \| = 2$

$(2 \quad 1) \longrightarrow \| \mu \| = 2$

$(3 \quad 0) \longrightarrow \| \mu \| = 3$

$$\mu^1 = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad \mu^2 = (2 \quad 1 \quad 0)$$

et : $\left\| \mu^i \right\| = \min\limits_{\mu \in M(I_s)} (\mu_i)$ D'où $\left\| \mu^1 \right\| = 1$ et $\left\| \mu^2 \right\| = 0$

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Pour chaque capteur i, 2 cas peuvent se produire:

- si $\left\| \mu^i \right\| = 0$, alors $\Delta_i = \infty$ C'est-à-dire que le RTBNE par rapport au capteur i est infini

  En d'autre terme, en cas de défaillance du capteur i, la fonctionnelle reste estimable et observable

Δ_i

- sinon $\Delta_i = s - \left\| \mu^i \right\|$ C'est-à-dire qu'en cas de défaillance du capteur i, la fonctionnelle restera estimable à l'intérieur de la fenêtre d'observation pendant Δ_i périodes

ici $\left\| \mu^1 \right\| = 1$ et $\left\| \mu^2 \right\| = 0$

donc $\Delta_1 = s - 1$ et $\Delta_2 = \infty$

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Enfin le RTBNE du système par rapport à la fonctionnelle est de:

$$\Delta = \min_{i \in I_s} \left(\Delta_i \right)$$

ici $\Delta_1 = s - 1$ et $\Delta_2 = \infty$ ➔ $\Delta = s - 1$

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Propriété 1:

Si $\max(\Delta_i) \neq \infty$, l'ensemble de capteurs I_S est minimal et les degrés de redondance fort et faible sont nuls

Propriété 2:

Si $\max(\Delta_i) = \infty$, l'ensemble de capteurs I_S est redondant et le degré de Redondance faible est supérieur ou égal à 1

- Si $\Delta = \infty$ alors $d_F \geq 1$
- Si $\Delta < \infty$ alors $d_F = 0$

4. Le concept du RTBNE du point de vue théorique

Le RTBNE par rapport au capteur i est le temps dont nous disposons pour détecter et localiser le défaut du capteur i en étant sûr que la fonctionnelle reste estimable.

Le RTBNE est le temps minimal dont nous disposons pour détecter et localiser le défaut d'un capteur quelconque, en étant sûr que la fonctionnelle reste estimable.

Sommaire

5. Application sur l'exemple initial

Prenons l'exemple d'un système linéaire discret :

$$x(k+1) = A.x(k) + B.u(k)$$
$$y(k) = C.x(k)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y(k) = C.x(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.x(k) = \begin{pmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix}$$

$$B = 0$$

Ainsi:
$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_6(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \\ x_4(k+1) = x_5(k) \\ x_5(k+1) = 2.x_1(k) \\ x_6(k+1) = x_2(k) \end{cases}$$

5. Application sur l'exemple initial

μ			$\Vert \mu \Vert = \max_{i \in I_s} \mu_i$
μ_1	μ_2	μ_3	
0	1	5	5
0	2	4	4
0	4	2	4
1	1	4	4
3	1	2	3

$$\boxed{\mu^*(I_s) = \min_{\mu_E \in M(I_s)} \Vert \mu \Vert = 3}$$

Pour chaque capteur i un vecteur μ^i lui est associé tel que

$$\mu^i = \{\mu(i), \mu \in M(I_s)\}$$

$$\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mu^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu^3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Vert \mu^i \Vert = \min_{\mu \in M(I_s)} (\mu_i)$$

$$\Vert \mu^1 \Vert = 0 \qquad \Vert \mu^2 \Vert = 1 \qquad \Vert \mu^3 \Vert = 2$$

$$\Delta_1 = \infty \qquad \Delta_2 = 2 \qquad \Delta_3 = 1$$

$$\Delta = \min_{i \in I_s} (\Delta_i) = 1$$

Si nous perdons un capteur, quelqu'il soit, entre l'instant k et l'instant k+1, le système restera estimable au moins à l'instant k+1

7. Conclusion et perspectives

- Le RTBNE est un nouveau concept qui s'intègre à la phase d'analyse de la capacité d'un système à tolérer les fautes de capteurs
- Le RTBNE nous donne le temps dont nous disposons suite à la perte d'un capteur pour détecter et localiser le défaut esans perte de l'estimabilité de la partie de l'état à estimer
- Des relations entre les degrés de redondance et le RTBNE sont montrées
- Cette notion a plus de chance d'être exploitable pour des systèmes d'ordre important.

  → En effet le RTBNE est toujours inférieur à l'ordre du système (sauf s'il est infini)

Questions :

- Cette durée, donnée par le RTBNE, est-elle suffisante pour détecter, localiser une défaillance d'un capteur ?
- Dans le même principe, un concept pourrait être développé au niveau des actionneurs afin d'exploiter l'énergie fournit par un actionneur avant sa défaillance.