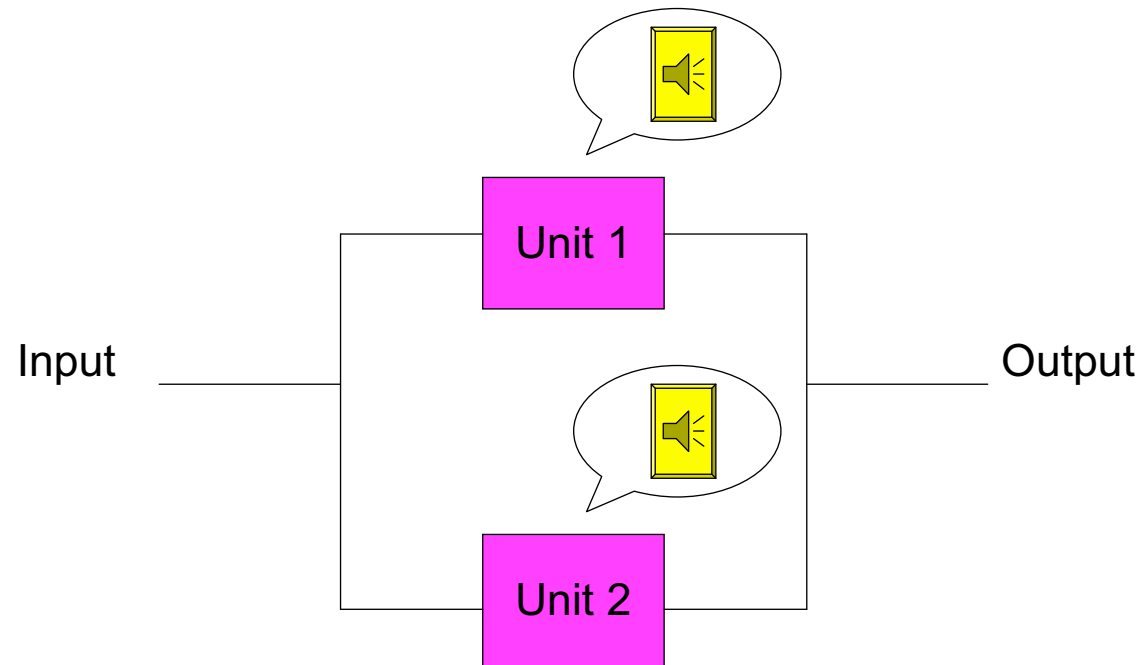


Optimisation conjointe des  
performances de surveillance et de  
maintenance:  
position du problème et application à  
deux composants en redondance  
active

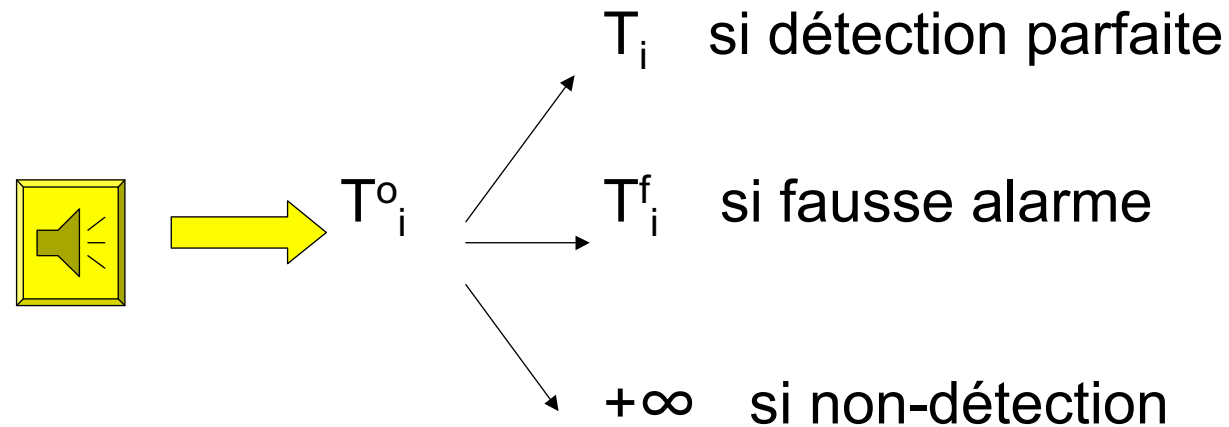
# Cas d'application



- Maintenance: renouvellement total préventif ou correctif.
- Surveillance: indique si chaque composant est en marche/panne.
- Sécurité: cout de pénalité en cas de panne générale.

⇒ Optimisation d'une date de renouvellement préventif en fonction de l'information de surveillance en ligne

# Modélisation de la surveillance (1)



- $T_i^f$  et  $T_i$  sont modélisées par des variables aléatoires à valeurs positives.
- Les réalisations de  $T_i^f$  ne sont prises en compte que si  $T_i^f < T_i$ .

## Modélisation de la surveillance (2)

On peut calculer pour chaque composant:

- la probabilité de fausse alarme  $p_{fa}(i)$ :  
$$p_{fa}(i) = P(T_i^f \leq T_i),$$
- la probabilité qu'il y ait une non-détection et pas de fausse alarme:

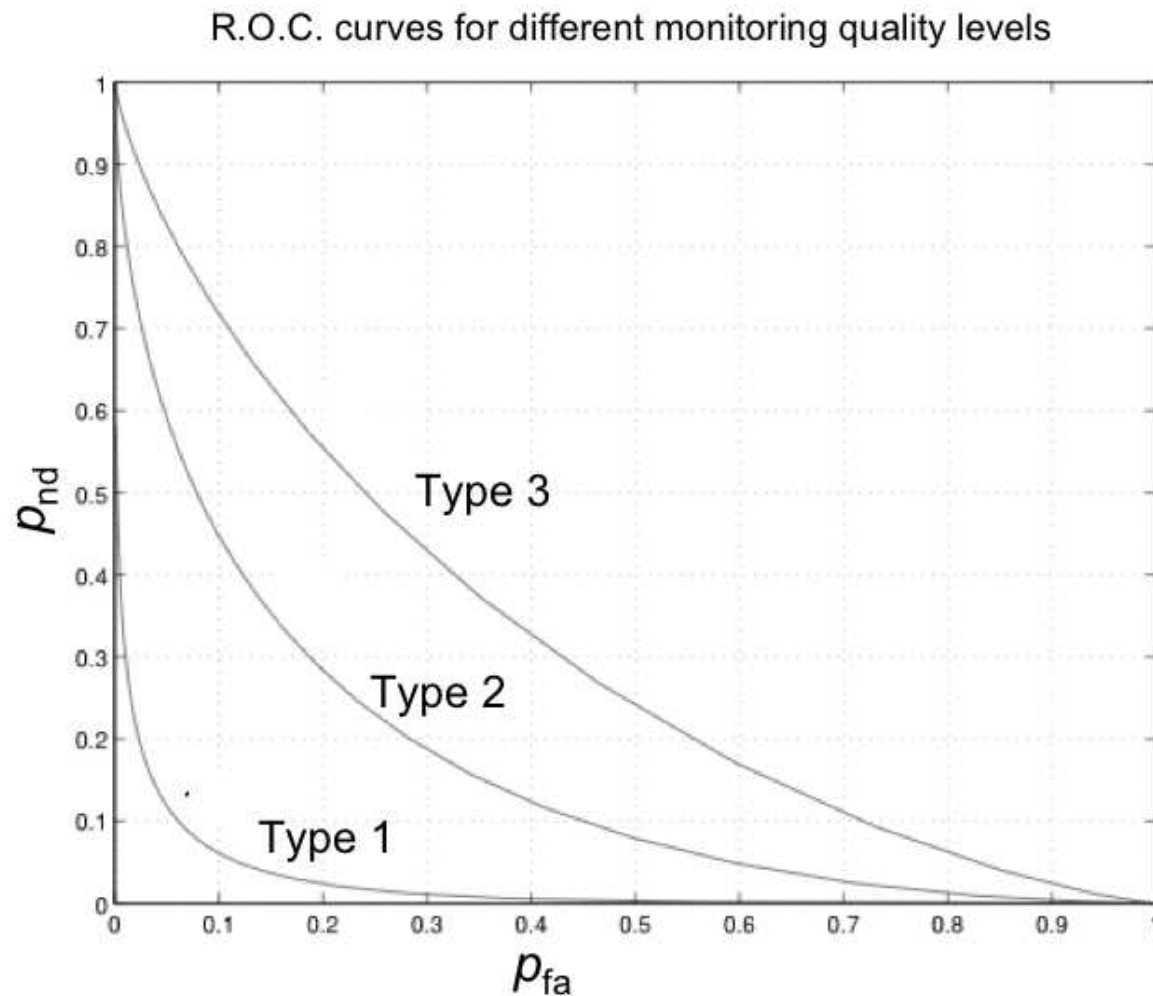
$$\begin{aligned} p_{nd}(i) &= P\{(\text{la surveillance ne détecte pas la panne de } C_i) \cap \\ &\quad (\text{il n'y a pas de fausse alarme sur } C_i)\} \\ &= p(i)P(T_i^f > T_i) \end{aligned}$$

où  $p(i)$  est la probabilité que le dispositif de surveillance du composant  $i$  commette une non-détection.

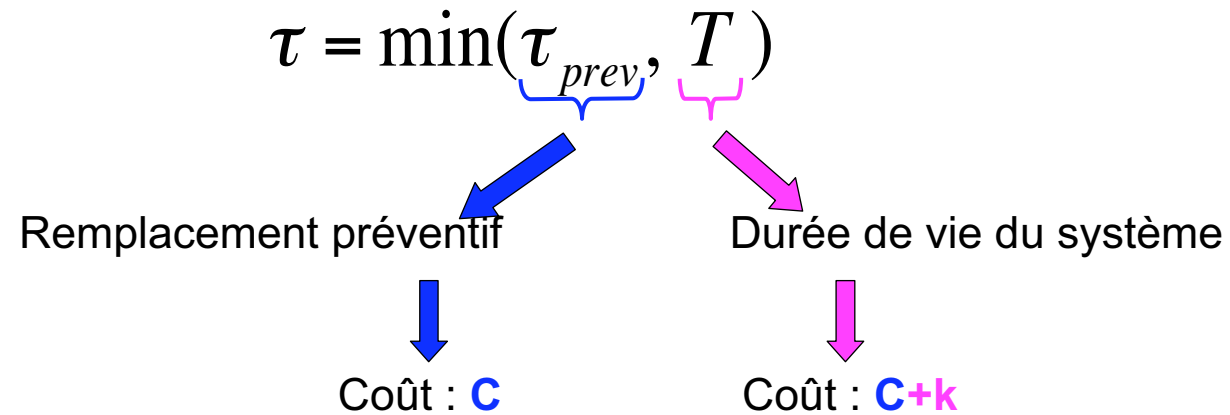
# Modélisation de la surveillance (3)

Courbe C.O.R

$$p(1) = p(2) = p, p_{fa}(1) = p_{fa}(2) = p_{fa}, p_{nd}(1) = p_{nd}(2) = p_{nd}.$$



# Modélisation de la maintenance (1)



⇒ Objectif: optimiser  $\tau_{prev}$

## Modélisation de la maintenance (2)

Si  $\tau_n$  est la longueur du  $n^{ième}$  cycle de renouvellement, le coût amorti  $S_{\tau_n}$  vaut:

$$S_{\tau_n} = (c + kI_{(\tau_n=T)})e^{-\alpha\tau_n}$$

où  $\alpha$  est le facteur d'amortissement. On choisit le critère de performance suivant:

$$K = \mathbb{E}(e^{-\alpha\zeta_1} S_{\tau_1} + e^{-\alpha\zeta_2} S_{\tau_2} + e^{-\alpha\zeta_3} S_{\tau_3} + \dots)$$

où  $\zeta_i$  est l'instant auquel le  $i^{ième}$  cycle commence:

$$\zeta_1 = 0$$

$$\zeta_i = \zeta_{i-1} + \tau_{i-1}, i > 1.$$

⇒  $\zeta_i$  est un temps d'arrêt

⇒ On montre facilement que:

$$K = \frac{\mathbb{E}(S_\tau)}{\mathbb{E}(1 - e^{-\alpha\tau})}$$

# Structure optimale de la règle de décision (1)

## Exemple du cas d'application

- Structure imposée (cas général):  $\tau = \min\{\tau_{prev}, T\}$
- Cas de l'application
  - Structure optimale du temps entre deux renouvellements:

$$\tau = \min\{t_{nd}, \max\{T_1^o, t_{fa}\}, \max\{T_2^o, t_{fa}\}, T\}$$

- Structure optimale du temps entre dernier renouvellement et prochain remplacement préventif:

$$\tau_{prev} = \min\{t_{nd}, \max\{T_1^o, t_{fa}\}, \max\{T_2^o, t_{fa}\}\}$$

⇒ Objectif dans le cas d'application: optimiser  $t_{nd}$  et  $t_{fa}$

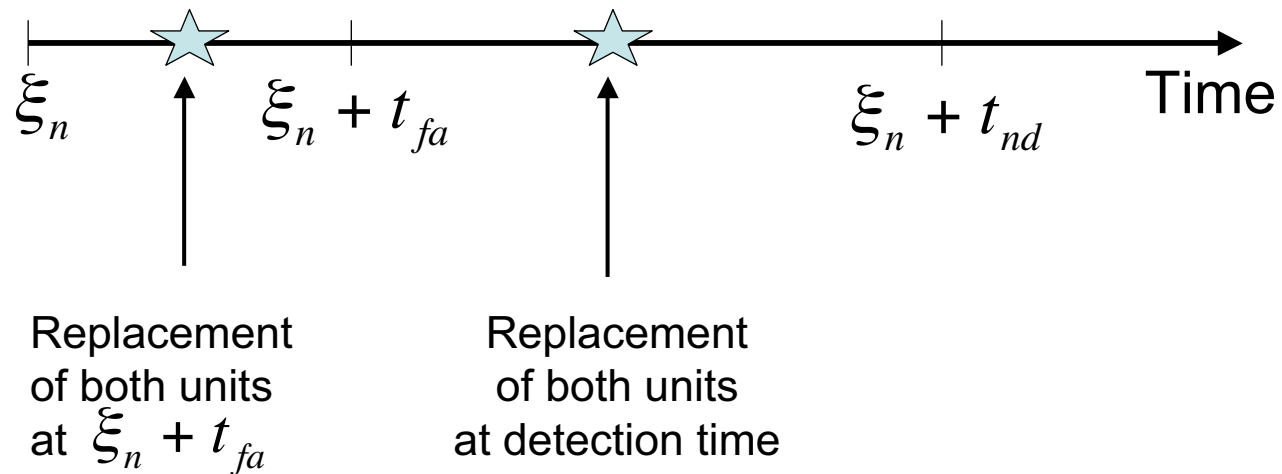


# Structure optimale de la règle de décision (2)

## Exemple du cas d'application

Illustration de la maintenance préventive

★ : Detection time of unit i failure



# Structure optimale de la règle de décision (3)

## Condition nécessaire d'optimalité

On définit le processus  $\{U_{\tau, \tau=\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots}\}$ :

$$U_{\tau} = K^*(1 - e^{-\alpha\tau}) - S_{\tau} ,$$

où  $K^* = K(\tau^*)$  est le coût optimal correspondant à  $\tau^*$  et  $\tau_{prev}^*$ . Alors:

**Résultat 1** *La longueur optimale d'un cycle de renouvellement  $\tau^*$  maximise la quantité  $\mathbb{E}(U_{\tau})$ , i.e.:*

$$\tau = \tau^* \implies \mathbb{E}(U_{\tau}) = \max_{\tau'} \left\{ \mathbb{E}(U_{\tau'}) \right\}.$$

# Preuve du résultat 1

**Preuve 1** Pour tout  $\tau \neq \tau^*$ , on a:

$$\begin{aligned} K(\tau) \geq K(\tau^*) &\iff \frac{\mathbb{E}(S_\tau)}{1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau})} \geq K^* \\ &\iff K^*(1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau})) - \mathbb{E}(S_\tau) \leq 0 \\ &\iff \mathbb{E}(U_\tau) \leq 0. \end{aligned}$$

*Ainsi, la durée optimale d'un cycle de renouvellement maximise la quantité  $\mathbb{E}(U_\tau)$ . Puisque  $U_\tau$  dépend de  $K^*$ , cette condition est vraiment une condition nécessaire (et non suffisante). En conclusion:*

$$\tau = \tau^* \implies \mathbb{E}(U_\tau) = 0$$

$$\tau = \tau^* \implies \mathbb{E}(U_\tau) = \max_{\tau'} \left\{ \mathbb{E}(U_{\tau'}) \right\}. \quad \blacksquare$$

## Structure optimale de la règle de décision (4)

Explicitation de la condition nécessaire sur le premier cycle

$$U_{\tau_1} = K^*(1 - e^{-\alpha\tau_1}) - S_{\tau_1} \quad S_{\tau_1} = (c + kI_{(T \leq \tau_1)})e^{-\alpha\tau_1}$$

Idée: re-écrire  $S_{\tau_1}$  et donc le processus  $U_s$  avec la décomposition sous forme de Semi Martingale Régulière du processus  $\mathbb{I}_{(T \leq \tau)}$ :

$$\mathbb{I}_{(T \leq \tau)} = \int_0^\tau \mathbb{I}_{(T > s)} \Lambda_s^o ds + M_\tau^o,$$

où  $(M_\tau^o)_{\tau > 0}$  est une  $\mathcal{F}^o$  – martingale telle que  $\mathbb{E}(M_\tau^o) = 0$  et  $\Lambda_s^o$  est le processus de taux de défaillance observé conditionné par l'information de surveillance .

# Structure optimale de la règle de décision (5)

Signification du processus de taux de défaillance

Taux de défaillance classique:

$$\lambda_T(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P\{s < T \leq s + \Delta s / T > s\}}{\Delta s}$$

Processus de taux de défaillance: mis à jour en ligne avec l'information contenue dans la filtration

$$\Lambda_s^o = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P\{s < T \leq s + \Delta s / \mathcal{F}_s^o\}}{\Delta s} \quad 0 \leq s \leq \zeta_2$$

avec  $\mathcal{F}_s^o$  la filtration définie de la manière suivante dans le cas d'application:

$$\mathcal{F}_s^o = \sigma(\mathbb{I}_{(T_1^o \leq t)}, \mathbb{I}_{(T_2^o \leq t)}, \mathbb{I}_{(T \leq t)}, 0 \leq t \leq s) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \zeta_2$$

## Structure optimale de la règle de décision (6)

Explicitation de la condition nécessaire sur le premier cycle

En considérant le processus  $r_s = -c + \frac{k}{\alpha} \Lambda_s^o$ , et en utilisant le résultat 1, on montre:

**Résultat 2** *Si le processus  $K - r_s$  a des trajectoires monotones décroissantes, alors la minimisation du coût de maintenance  $K$  revient à trouver:*

$$K^* = \min_{\tau} \left\{ K = \frac{\mathbb{E}(S_{\tau})}{1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau})} \right\}$$

*sous la contrainte:  $\tau = \inf\{s \in \mathbb{R} + / K - r_s < 0\}$ .*

# Structure optimale de la règle de décision (7)

Application au cas étudié

$$\Lambda_s^o = \Lambda_{no}^o(s) \mathbb{I}_{(T_1^o > s, T_2^o > s, T > s)} + \Lambda_1^o(s) \left( \mathbb{I}_{(T_1^o \leq s, T_2^o > s, T > s)} + \mathbb{I}_{(T_1^o > s, T_2^o \leq s, T > s)} \right)$$

où:

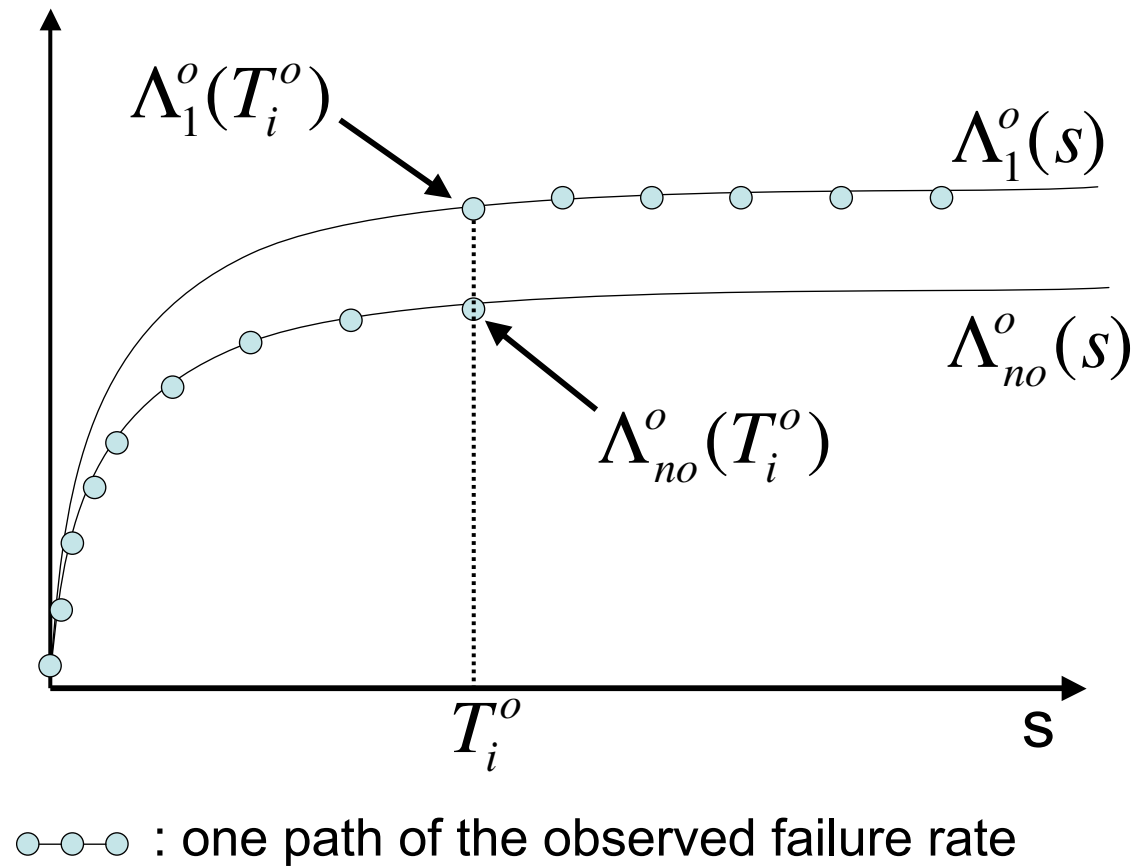
$$\Lambda_{no}^o(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P\{s < T \leq s + \Delta s / T_1^o > s, T_2^o > s, T > s\}}{\Delta s}$$

et:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^o(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P\{s < T \leq s + \Delta s / T_1^o \leq s, T_2^o > s, T > s\}}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{P\{s < T \leq s + \Delta s / T_1^o > s, T_2^o \leq s, T > s\}}{\Delta s} \end{aligned}$$

# Structure optimale de la règle de décision (8)

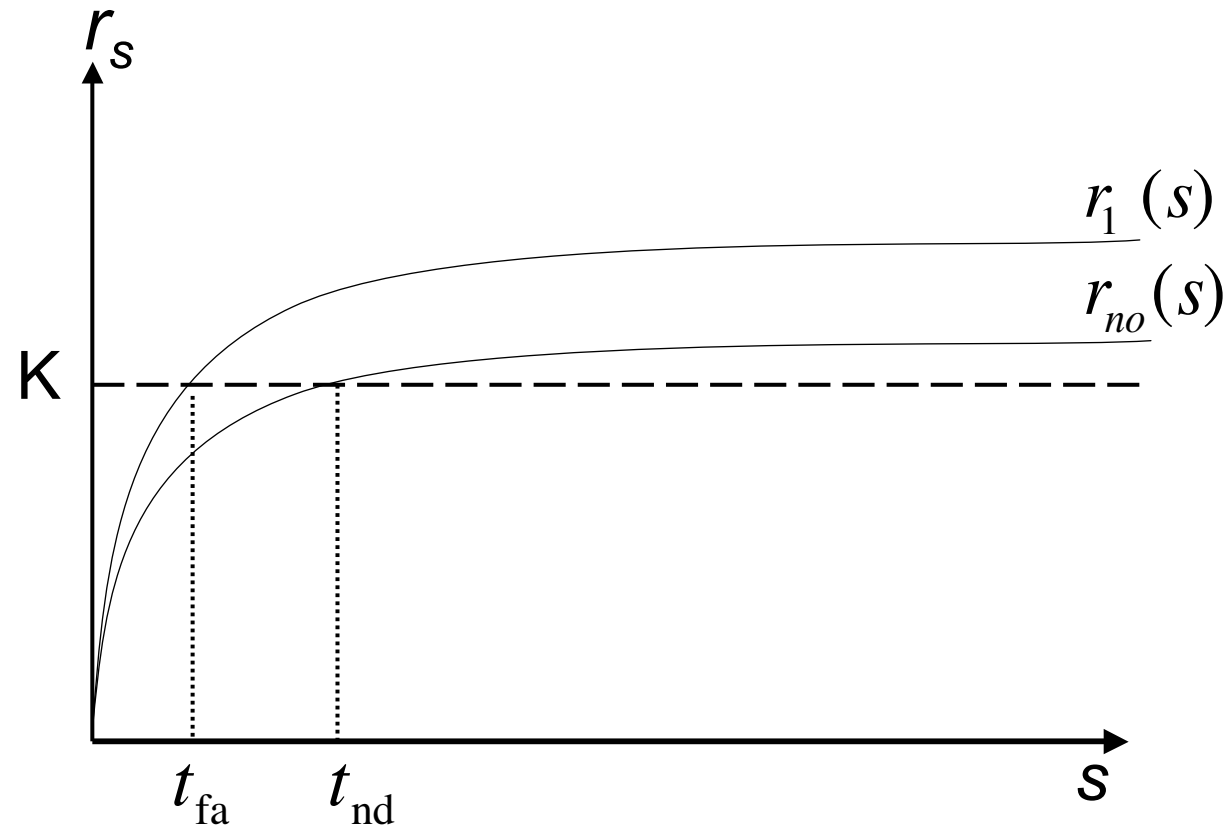
Application au cas étudié





# Structure optimale de la règle de décision (9)

Application au cas étudié :  $\tau = \inf\{s \in \mathbb{R}^+ / K - r_s < 0\}$



# Structure optimale de la règle de décision (10)

## Application au cas étudié (4)

La condition nécessaire:

$$\tau = \inf \{s \in \mathbb{R}_+ / K - r_s < 0\}$$

devient:

$$\tau = \inf \{t_{\text{nd}}, \max(T_1^o, t_{\text{fa}}), \max(T_2^o, t_{\text{fa}}), T\} .$$

et le problème de minimisation s'écrit:

$$K^* = \min_{\tau} \left\{ K = \frac{\mathbb{E}(S_{\tau})}{1 - \mathbb{E}(e^{-\alpha\tau})} \right\}$$

$$\text{sous la contrainte: } \tau = \inf \{t_{\text{nd}}, \max(T_1^o, t_{\text{fa}}), \max(T_2^o, t_{\text{fa}}), T\} .$$

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Principe général

1. Etape 1: optimiser les paramètres de la maintenance ( $t_{fa}$ ,  $t_{nd}$ ) pour les couples ( $p_{fa}$ ,  $p_{nd}$ ) donnés par les courbes C.O.R.
2. Etape 2: choisir la courbe C.O.R. qui permet d'avoir le meilleur compromis coût maintenance / coût surveillance.

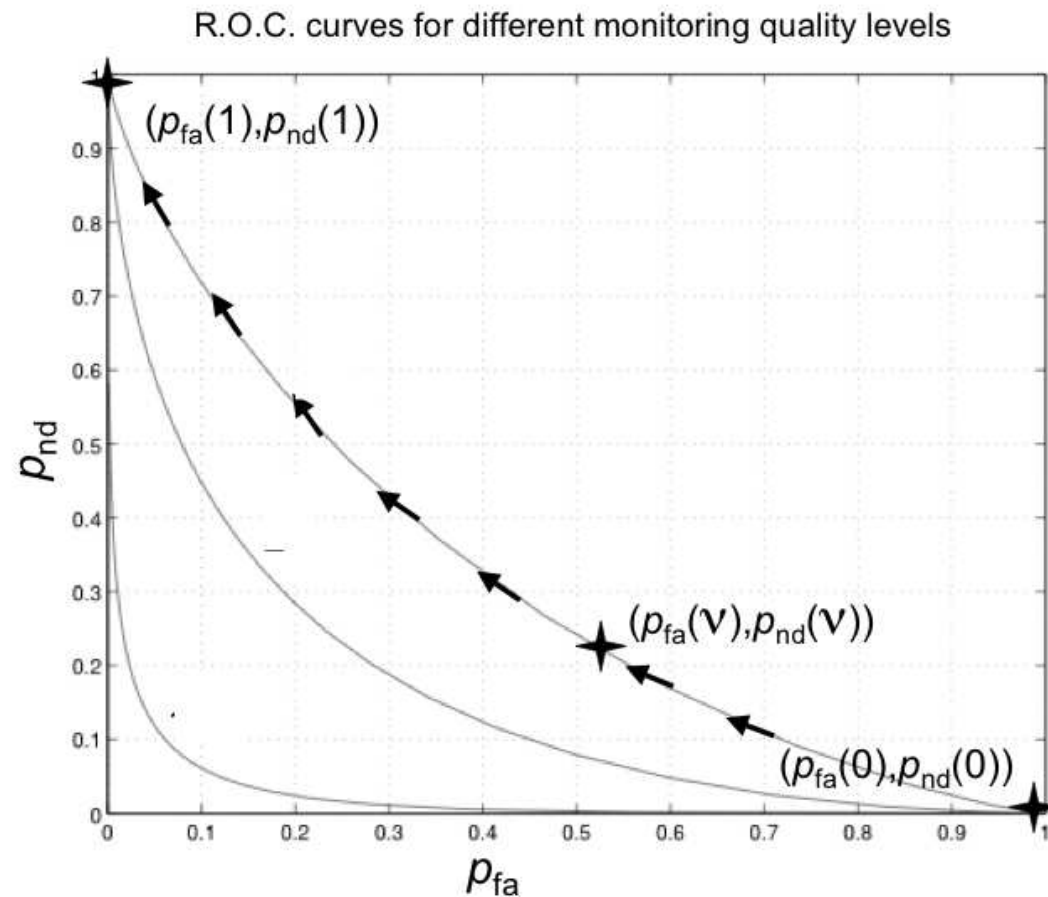
⇒ Optimisation de:

- $t_{fa}$  et  $t_{nd}$  pour la maintenance,
- $p_{fa}$  et  $p_{nd}$  pour la surveillance.

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

Paramétrisation des courbes COR et choix d'un ensemble de points sur chacune



# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

Choix d'un modèle de loi exponentielle pour  $T_i$  et  $T_i^f$  :

$$P(T_i > t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T_i^f > t) = e^{-\mu t}$$

$\Rightarrow \lambda$  est fixé à priori

$\Rightarrow \mu$  est à fixer en fonction de  $p_{fa}$ .

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

Calcul pour chaque point des courbes C.O.R., des paramètres  $\mu$  et  $p$  correspondants :

$$p_{\text{fa}} = P\{T_i^f \leq T_i\} = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$$

$$p_{\text{nd}} = P\{T_i^f > T_i\}p = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}p.$$

Donc:

$$\mu = \frac{p_{\text{fa}}\lambda}{1 - p_{\text{fa}}}$$

$$p = \frac{\mu + \lambda}{\lambda}p_{\text{nd}}.$$

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

Pour les couples  $(p_{fa}, p_{nd})$  sélectionnés d'une courbe C.O.R.:

- le coût de maintenance  $K$  est évalué par simulation Monté-Carlo sur 150 000 cycles de renouvellement  $\tau$ ,
- les paramètres de maintenance  $(t_{fa}, t_{nd})$  sont optimisés pour minimiser  $K$ .

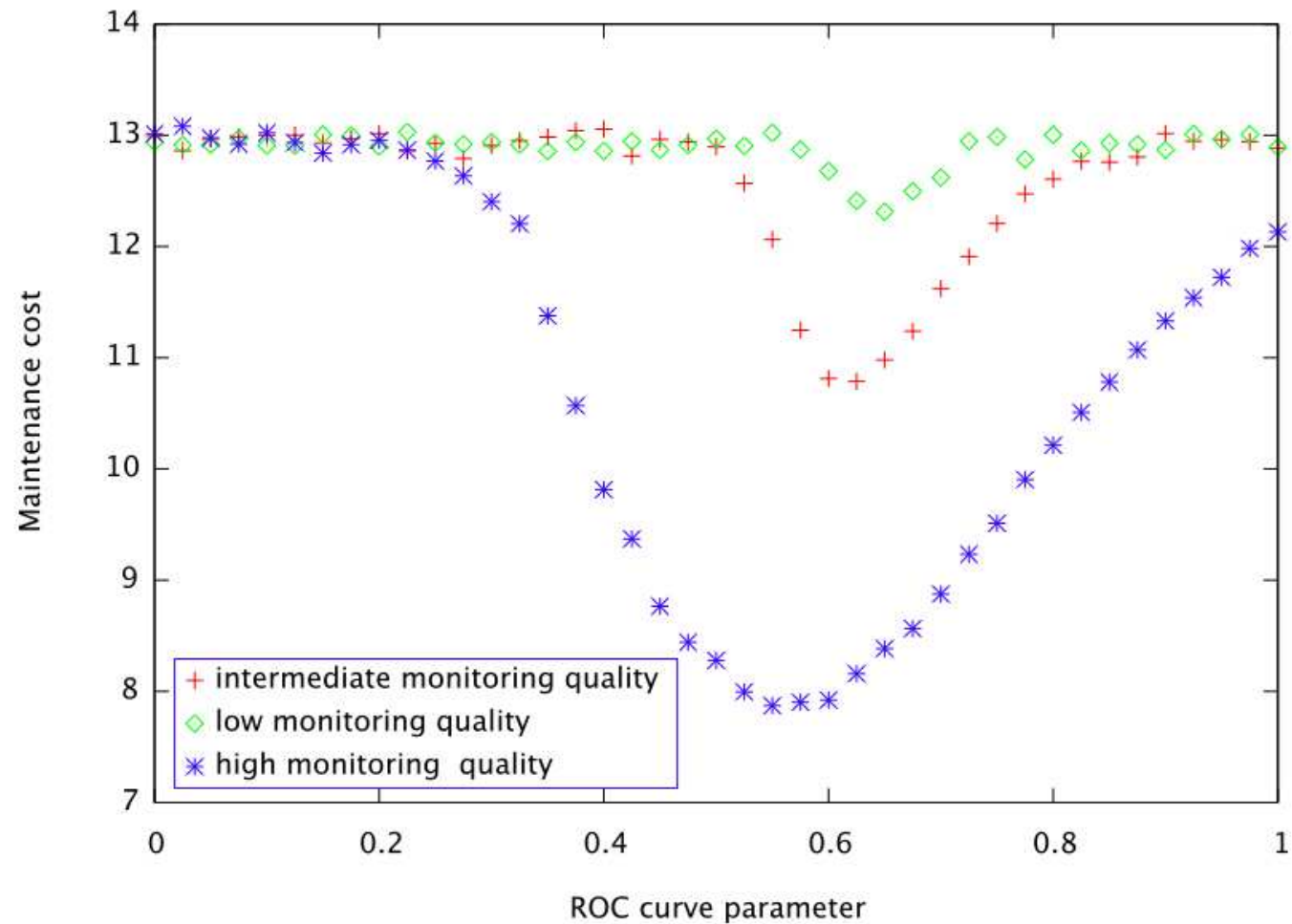
⇒ On obtient  $(p_{fa}^*, p_{nd}^*)$  qui permet d'avoir le plus petit coût de maintenance pour une courbe C.O.R fixée

⇒ On recommence pour chaque courbe

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Résultats de l'étape 1

Cost of maintenance as a function of  $(p_{fa}, p_{nd})$  for different curves C.O.R with  $\lambda = 0.2$ ,  $c = 1$ ,  $k = 10$  and  $\alpha = 0.08$





# Optimisation conjointe dans le cas d'application

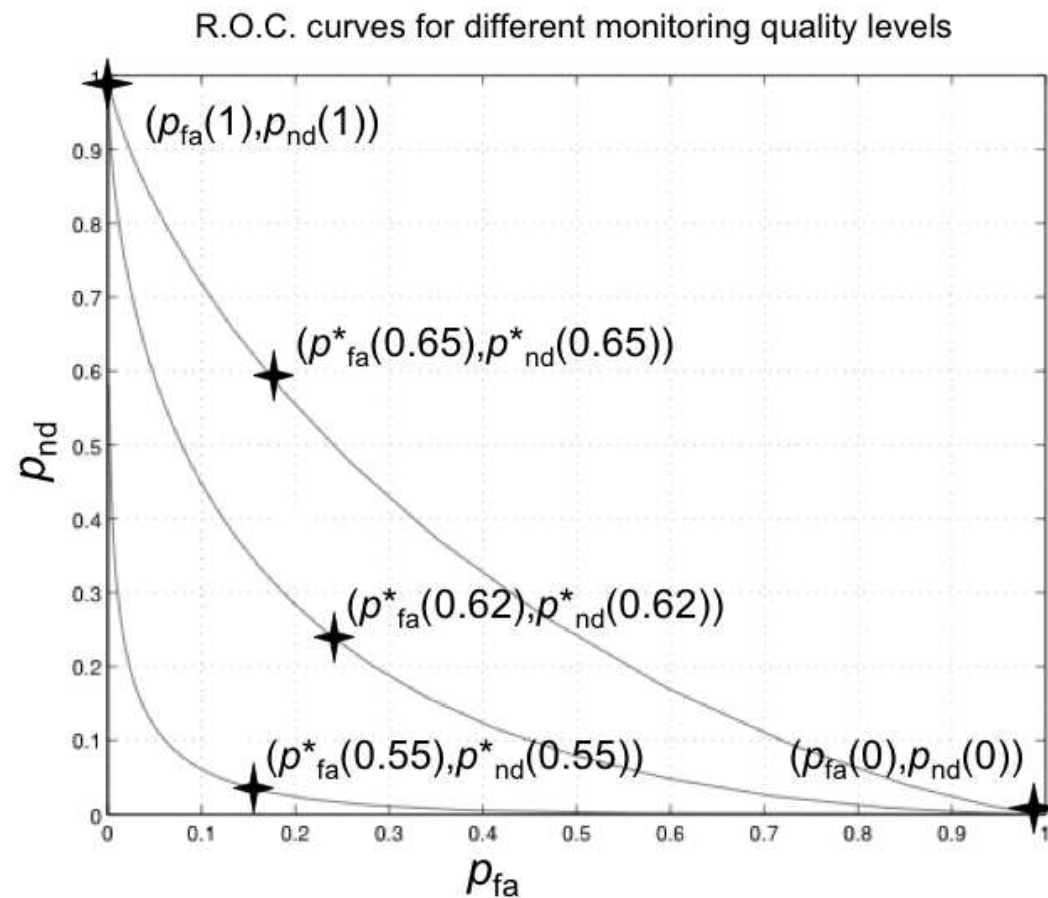
## Etape 1

Qualité de la surveillance	perf. surv.		param. maint.		coût $K^*$
	$p_{fa}^*$	$p_{nd}^*$	$t_{fa}^*$	$t_{nd}^*$	
faible (type 3)	0.18	0.58	0.1	2.7	12.31
intermédiaire (type 2)	0.24	0.25	0.1	4	10.78
élevée (type 1)	0.16	0.033	0.1	9.8	7.87

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

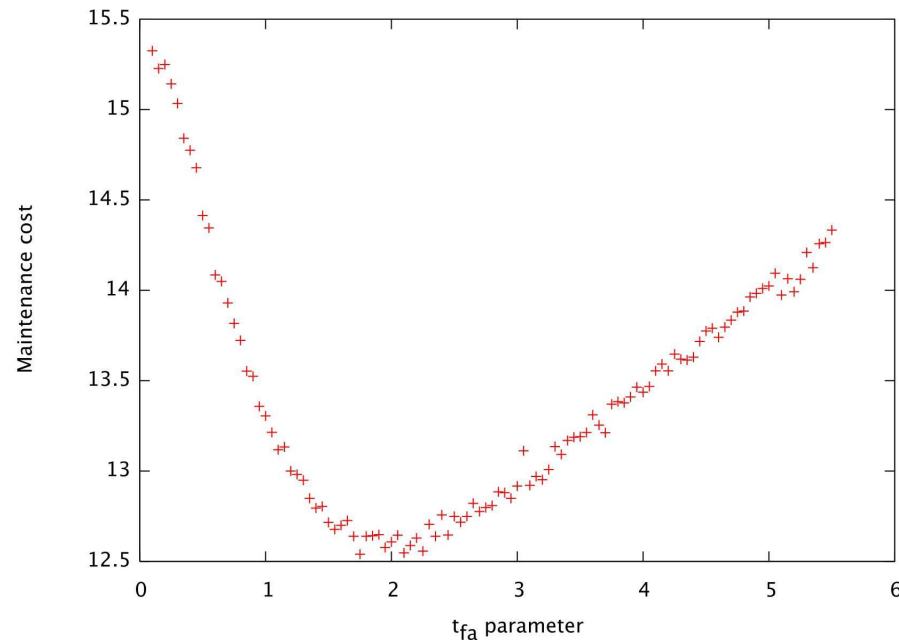
Position de  $(p_{fa}^*, p_{nd}^*)$  sur les courbes C.O.R



# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 1

Remarque sur le paramètre  $t_{fa}^*$



Cout de maintenance en fonction de  $t_{fa}$  pour un point sous optimal de la courbe C.OR. de type 2:  $p_{fa} = 0.033$ ,  $p_{nd} = 0.66$  avec  $t_{nd} = 5.5$  (optimal pour ces perf. de surv.)

# Optimisation conjointe dans le cas d'application

## Etape 2

Pour chaque couple optimal  $(p_{fa}^*, p_{nd}^*)$  donné par l'étape 1, comparer :

- le gain obtenu pour la maintenance
- le coût engendré par la courbe C.O.R correspondante.