Quelques applications de la représentation polytopique à la commande et l'estimation

Souad Bezzaoucha, Benoît Marx, Didier Maquin et José Ragot

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)
Université de Lorraine, CNRS

GT S3 : Sûreté, Surveillance, Supervision, 11 Juin 2012

Objectifs

1. Synthèse d'une commande par retour d'état (ou de sortie) assurant le recalage à l'origine du système, sous contrainte de saturation
2. Synthèse d'observateurs pour des systèmes à paramètres variants dans le temps assurant l'estimation simultanée de l'état et des variations paramétriques du système

Contribution

Ré-écriture polytopique (modèles de T-S) des non-linéarités

Objectifs

1. Synthèse d'une commande par retour d'état (ou de sortie) assurant le recalage à l'origine du système, sous contrainte de saturation
2. Synthèse d'observateurs pour des systèmes à paramètres variants dans le temps assurant l'estimation simultanée de l'état et des variations paramétriques du système

Contribution

Ré-écriture polytopique (modèles de T-S) des non-linéarités

Un modèle T-S est composé d'un ensemble fini de modèles linéaires interconnectés grâce à des fonctions non linéaires définissant la contribution de chaque sous-modèle.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) & = & \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ la commande et $y(t) \in \mathbb{R}^{m}$ la sortie.

$\xi(t) \in \mathbb{R}^{q}$ variable de décision (mesurable $u(t), y(t)$ ou non mesurable $x(t)$).

Les fonctions poids $\mu_i(\xi(t))$ des n sous modèles vérifient la propriété de somme convexe

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad \text{et} \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \forall t \end{cases}$$

Transformation d'un modèle NL en modèle T-S

Basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire, le passage par une forme quasi-LPV et à l'aide de transformations polytopiques convexes,

$$\text{NL}\begin{cases}\dot{x}(t)=f_x(x(t),u(t))\\ y(t)=f_y(x(t),u(t))\end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{Quasi-LPV}\begin{cases}\dot{x}(t) & = & A(x(t),u(t))x(t)+B(x(t),u(t))u(t)\\ y(t) & = & C(x(t),u(t))x(t)+D(x(t),u(t))u(t)\end{cases}\Rightarrow$$

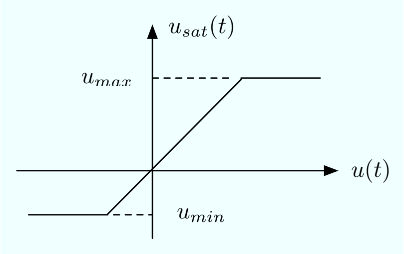
$$\text{Modèle T-S}\begin{cases}\dot{x}(t) & = & \sum_{i=1}^{n}\mu_i(\xi(t))(A_ix(t)+B_iu(t))\\ y(t) & = & \sum_{i=1}^{n}\mu_i(\xi(t))(C_ix(t)+D_iu(t))\end{cases}$$

Saturation polytopique

Objectif

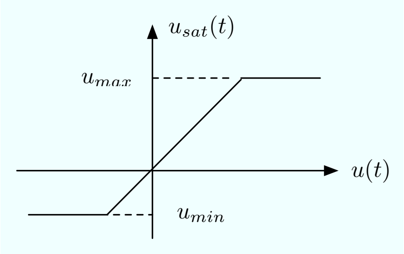
ré-écrire la saturation des actionneurs sous forme de modèles T-S

$$u_{sat}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ u_{max} & \text{si} \quad u(t) \geq u_{max} \\ u_{min} & \text{si} \quad u(t) \leq u_{min} \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_{sat}(t) & = \mu_1(t)u_{min} + \mu_2(t)u(t) + \mu_3(t)u_{max} \\ \mu_1(t) & = \dfrac{1 - sign(u(t) - u_{min})}{2} \\ \mu_2(t) & = \dfrac{sign(u(t) - u_{min}) - sign(u(t) - u_{max})}{2} \\ \mu_3(t) & = \dfrac{1 + sign(u(t) - u_{max})}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(t)(\lambda_i u(t) + \gamma_i) \\ \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 0 \\ \gamma_1 = u_{min} \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = u_{max} \end{cases}$$

$$u_{sat}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ u_{max} & \text{si} \quad u(t) \geq u_{max} \\ u_{min} & \text{si} \quad u(t) \leq u_{min} \end{cases}$$



$$\begin{cases} u_{sat}(t) & = \mu_1(t)u_{min} + \mu_2(t)u(t) + \mu_3(t)u_{max} \\ \mu_1(t) & = \dfrac{1 - sign(u(t) - u_{min})}{2} \\ \mu_2(t) & = \dfrac{sign(u(t) - u_{min}) - sign(u(t) - u_{max})}{2} \\ \mu_3(t) & = \dfrac{1 + sign(u(t) - u_{max})}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(t)(\lambda_i u(t) + \gamma_i) \\ \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 0 \\ \gamma_1 = u_{min} \quad \gamma_2 = 0 \quad \gamma_3 = u_{max} \end{cases}$$

$u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $u_j(t)$ (resp. $u^j_{sat}(t)$) la $j^{\text{ème}}$composante de $u(t)$ (resp. $u_{sat}(t)$).

$$u_{sat}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3} \mu_i^1(u_1(t))(\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{3} \mu_i^{n_u}(u_{n_u}(t))(\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u}) \end{pmatrix}$$

Pour avoir les mêmes fonctions poids $\mu_i^j(t)$ pour toutes les composantes du vecteur $u_{sat}(t)$

$$u_{sat}(t) = \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i^1(u_1(t))(\lambda_i^1 u_1(t) + \gamma_i^1)\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n_u} \sum_{j=1}^{3} \mu_j^k(u_k(t))\right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{3} \mu_i^\ell(u_\ell(t))(\lambda_i^\ell u_\ell(t) + \gamma_i^\ell) \times \left(\prod_{k=1, k\neq \ell}^{n_u} \sum_{j=1}^{3} \mu_j^k(u_k(t))\right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{3} \mu_i^{n_u}(u_{n_u}(t))(\lambda_i^{n_u} u_{n_u}(t) + \gamma_i^{n_u})\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n_u-1} \sum_{j=1}^{3} \mu_j^k(u_k(t))\right) \end{pmatrix}$$

Ecriture T-S de la saturation

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

Fonctions d'activation

$$\begin{cases} \mu_i^{sat}(t) & = & \prod_{j=1}^{n_u} \mu^j_{\sigma_i^j}(u_j(t)) \\ \Lambda_i & = & diag(\lambda^1_{\sigma_i^1}, \ldots, \lambda^{n_u}_{\sigma_i^{n_u}}) \\ \Gamma_i & = & \begin{pmatrix} \gamma^1_{\sigma_i^1} & \ldots & \gamma^{n_u}_{\sigma_i^{n_u}} \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

où les indices $\sigma_i^j (i = 1, \ldots, 3^{n_u}$ et $j = 1, \ldots, n_u)$, égaux à $1, 2$ ou 3, indiquent la partition de la $j^{\text{ème}}$ entrée $(\mu_1^j, \mu_2^j$ ou $\mu_3^j)$ dans le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle.

La relation entre le sous modèle i et l'indice σ_i^j est donnée par

$$i = 3^{n_u-1}\sigma_i^1 + 3^{n_u-2}\sigma_i^2 + \ldots + 3^0\sigma_i^{n_u} - (3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n_u-1})$$

Ecriture T-S de la saturation

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

Fonctions d'activation

$$\begin{cases} \mu_i^{sat}(t) & = & \prod_{j=1}^{n_u} \mu^j_{\sigma_i^j}(u_j(t)) \\ \Lambda_i & = & diag(\lambda^1_{\sigma_i^1}, \ldots, \lambda^{n_u}_{\sigma_i^{n_u}}) \\ \Gamma_i & = & \begin{pmatrix} \gamma^1_{\sigma_i^1} & \ldots & \gamma^{n_u}_{\sigma_i^{n_u}} \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

où les indices $\sigma_i^j (i = 1, \ldots, 3^{n_u}$ et $j = 1, \ldots, n_u)$, égaux à $1, 2$ ou 3, indiquent la partition de la $j^{\text{ème}}$ entrée (μ_1^j, μ_2^j ou μ_3^j) dans le $i^{\text{ème}}$ sous-modèle.

La relation entre le sous modèle i et l'indice σ_i^j est donnée par

$$i = 3^{n_u-1}\sigma_i^1 + 3^{n_u-2}\sigma_i^2 + \ldots + 3^0\sigma_i^{n_u} - (3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n_u-1})$$

Pour $n_u = 2$ entrées :

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{9} \mu_i(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$

$$\begin{cases} \lambda_1^1 = \lambda_1^2 = 0 \quad \lambda_2^1 = \lambda_2^2 = 1 \quad \lambda_3^1 = \lambda_3^2 = 0 \\ \gamma_1^1 = u_{min}^1 \quad \gamma_2^1 = 0 \quad \gamma_3^1 = u_{max}^1 \\ \gamma_1^2 = u_{min}^2 \quad \gamma_2^2 = 0 \quad \gamma_3^2 = u_{max}^2 \end{cases}$$

sous modèle i	(σ_i^1, σ_i^2)	$\mu_i(t)$	Λ_i	Γ_i
1	$(1,1)$	$\mu_1^1\mu_1^2$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_1^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \end{bmatrix}^T$
2	$(1,2)$	$\mu_1^1\mu_2^2$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_2^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}^T$
3	$(1,3)$	$\mu_1^1\mu_3^2$	$\text{diag}(\lambda_1^1, \lambda_3^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_3^2 \end{bmatrix}^T$
4	$(2,1)$	$\mu_2^1\mu_1^2$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_1^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_2^1 & \gamma_1^2 \end{bmatrix}^T$
5	$(2,2)$	$\mu_2^1\mu_2^2$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_2^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_2^1 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}^T$
6	$(2,3)$	$\mu_2^1\mu_3^2$	$\text{diag}(\lambda_2^1, \lambda_3^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_2^1 & \gamma_3^2 \end{bmatrix}^T$
7	$(3,1)$	$\mu_3^1\mu_1^2$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_1^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_3^1 & \gamma_1^2 \end{bmatrix}^T$
8	$(3,2)$	$\mu_3^1\mu_2^2$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_2^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_3^1 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}^T$
9	$(3,3)$	$\mu_3^1\mu_3^2$	$\text{diag}(\lambda_3^1, \lambda_3^2)$	$\begin{bmatrix} \gamma_3^1 & \gamma_3^2 \end{bmatrix}^T$

Commande par retour d'état sous contrainte de saturation

Problématique

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{sat}(t)$$
$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$
$$u(t) = -Kx(t)$$

Objectif

Trouver le gain K pour garantir le recalage du système à l'origine et compte tenu des limites de saturation

Solution proposée

- Passage par la représentation T-S : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)((A - B\Lambda_i K)x(t) + B\Gamma_i)$
- Problème d'optimisation sous contraintes LMI : $\min_K ||x(t)||$

Problématique

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{sat}(t)$$
$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$
$$u(t) = -Kx(t)$$

Objectif

Trouver le gain K pour garantir le recalage du système à l'origine et compte tenu des limites de saturation

Solution proposée

- Passage par la représentation T-S : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)((A - B\Lambda_i K)x(t) + B\Gamma_i)$
- Problème d'optimisation sous contraintes LMI : $\min_K ||x(t)||$

Problématique

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{sat}(t)$$
$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i)$$
$$u(t) = -Kx(t)$$

Objectif

Trouver le gain K pour garantir le recalage du système à l'origine et compte tenu des limites de saturation

Solution proposée

- Passage par la représentation T-S : $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)((A - B\Lambda_i K)x(t) + B\Gamma_i)$
- Problème d'optimisation sous contraintes LMI : $\min_K ||x(t)||$

Approche de Lyapunov

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i(t)((A - B\Lambda_i K)x(t) + B\Gamma_i)$$

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P = P^T > 0$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i(t)(x^T(t)((A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P\Sigma^{-1}P)x(t) + \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i)$$

Définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i &= (A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P\Sigma^{-1}P \\ \varepsilon &= \min_{i=1:3^{n_u}} \lambda_{min}(-\mathcal{Q}_i) \\ \delta &= \max_{i=1:3^{n_u}} \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\dot{V}(t) < -\varepsilon \parallel x \parallel^2 + \delta}$$

Condition

$$\dot{V}(t) < -\varepsilon \parallel x(t) \parallel^2 + \delta$$

x(t) est borné et converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ si :

$$\mathcal{Q}_i < 0 \quad \text{et} \quad \parallel x(t) \parallel^2 > \frac{\delta}{\varepsilon}, \qquad i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

LMI à résoudre

$$\mathcal{Q}_i = (A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P\Sigma^{-1} P$$

$$\mathcal{Q}_i < 0 \equiv \begin{pmatrix} P_1 A^T + AP_1 - R^T \Lambda_i^T B^T - B\Lambda_i R & I \\ I & -\Sigma \end{pmatrix} < 0, \ (P_1 = P^{-1}), \ i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

Commande par retour d'état : $u(t) = -Kx(t), \quad K = RP_1^{-1}$

Condition

$$\dot{V}(t) < -\varepsilon \parallel x(t) \parallel^2 + \delta$$

x(t) est borné et converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ si :

$$\mathcal{Q}_i < 0 \quad \text{et} \quad \parallel x(t) \parallel^2 > \frac{\delta}{\varepsilon}, \qquad i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

LMI à résoudre

$$\mathcal{Q}_i = (A - B\Lambda_i K)^T P + P(A - B\Lambda_i K) + P\Sigma^{-1}P$$

$$\mathcal{Q}_i < 0 \equiv \begin{pmatrix} P_1 A^T + AP_1 - R^T \Lambda_i^T B^T - B\Lambda_i R & I \\ I & -\Sigma \end{pmatrix} < 0, \ (P_1 = P^{-1}), \ i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

Commande par retour d'état : $u(t) = -Kx(t), \quad K = RP_1^{-1}$

Objectif : minimiser le rayon de la boule

$x(t)$ converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ $\rightarrow$ minimiser le rayon ?

Optimisation de δ et ε

$$\delta = \max_{i=1:3^{n_u}} \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i \quad \text{avec} \quad \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i < \beta \ \Rightarrow \delta < \beta$$

$$\begin{cases} 1/\varepsilon < \beta & \equiv \varepsilon > 1/\beta \\ \varepsilon = \min_{i=1:3^{n_u}} \lambda_{min}(-\mathcal{Q}_i) \end{cases} \Rightarrow$$

$$-Q_i > (1/\beta)\, I,\ i = 1, \ldots, 3^{n_u} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} Q_i & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0,\ i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

$$\begin{cases} \delta < \beta \\ \varepsilon > 1/\beta \end{cases} \Rightarrow \text{rayon} < \beta \Rightarrow \min(\text{rayon}) \equiv \min \beta$$

Objectif : minimiser le rayon de la boule

$x(t)$ converge vers une boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}$ → minimiser le rayon ?

Optimisation de δ et ε

$$\delta = \max_{i=1:3^{n_u}} \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i \quad \text{avec} \quad \Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i < \beta \quad \Rightarrow \delta < \beta$$

$$\begin{cases} 1/\varepsilon < \beta & \equiv \varepsilon > 1/\beta \\ \varepsilon = \min\limits_{i=1:3^{n_u}} \lambda_{min}(-\mathcal{Q}_i) \end{cases} \Rightarrow$$

$$-Q_i > (1/\beta)\, I,\ i = 1, \ldots, 3^{n_u} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} Q_i & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0,\ i = 1, \ldots, 3^{n_u}$$

$$\boxed{\begin{cases} \delta < \beta \\ \varepsilon > 1/\beta \end{cases} \Rightarrow \text{rayon} < \beta \Rightarrow \min(\text{rayon}) \equiv \min \beta}$$

Théorème

Il existe une commande par retour d'état statique pour un système à commande saturée tel que l'état converge vers une boule centrée à l'origine de rayon borné par β, s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, R, \Sigma = \Sigma^T > 0$ solutions du problème d'optimisation

$$\min_{P_1, R, \Sigma} \beta$$

$$\Gamma_i^T B^T \Sigma B \Gamma_i < \beta, \quad \begin{pmatrix} Q_i & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0, \quad Q_i = \begin{pmatrix} P_1 A^T + A P_1 - R^T \Lambda_i^T B^T - B \Lambda_i R & I \\ I & -\Sigma \end{pmatrix}$$

$i = 1 : 3^{n_u}$

La commande par retour d'état est donnée par :

$$u(t) = -Kx(t)$$
$$K = R P_1^{-1}$$

Extension aux systèmes non linéaires sous forme T-S : commande par retour d'état sous contrainte de saturation

Modèle du système et sa commande saturée

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u_{sat}(t)) \\
u_{sat}(t) &= \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \\
u(t) &= -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)
\end{aligned}$$

Objectif

Ajuster les gains K_i pour recaler le système à l'origine compte tenu de la saturation

Solution proposée

Représentation T-S du système bouclé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3^{nu}} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t)((A_i - B_i \Lambda_k K_j)x(t) + B_i \Gamma_k)$$

Modèle du système et sa commande saturée

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u_{sat}(t)) \\
u_{sat}(t) &= \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \\
u(t) &= -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)
\end{aligned}$$

Objectif

Ajuster les gains K_i pour recaler le système à l'origine compte tenu de la saturation

Solution proposée

Représentation T-S du système bouclé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{3^{nu}} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\mu_k^{sat}(t)((A_i - B_i\Lambda_k K_j)x(t) + B_i\Gamma_k)$$

Modèle du système et sa commande saturée

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u_{sat}(t)) \\
u_{sat}(t) &= \sum_{i=1}^{3^{n_u}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \\
u(t) &= -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)
\end{aligned}$$

Objectif

Ajuster les gains K_i pour recaler le système à l'origine compte tenu de la saturation

Solution proposée

Représentation T-S du système bouclé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{3^{nu}} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \mu_k^{sat}(t)((A_i - B_i \Lambda_k K_j)x(t) + B_i \Gamma_k)$$

Théorème

Il existe une commande par retour d'état statique pour un système non linéaire sous forme T-S sous contrainte de saturation tel que l'état converge vers une boule centrée à l'origine de rayon borné par β*, s'il existe des matrices* $P_1 = P_1^T > 0, R, \Sigma_k = \Sigma_k^T > 0$ *solutions du problème d'optimisation*

$$\min_{P_1, R, \Sigma_k} \beta$$

$$\Gamma_k^T B_i^T \Sigma_k B_i \Gamma_k < \beta, \begin{pmatrix} Q_{ijk} & I \\ I & -\beta I \end{pmatrix} < 0, \; Q_{ijk} = \begin{pmatrix} P_1 A_i^T + A_i P_1 - R_j^T \Lambda_k^T B_i^T - B_i \Lambda_k R_j & I \\ I & -\Sigma_k \end{pmatrix}$$

pour $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, 3^{n_u}$.

La commande est donnée par

$$u(t) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)$$
$$K_j = P_1^{-1} R_j$$

Autres applications

- Extension aux systèmes non linéaires incertains sous forme T-S : commande par retour d'état sous contrainte de saturation
- Extension aux systèmes non linéaires sous forme T-S : synthèse de contrôleurs statique et dynamique par retour de sortie sous contrainte de saturation

Simulations

Cas système non linéaire sous forme T-S et commande saturée

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\xi)(A_i x(t) + B_i u_{sat}(t))$$

$$u_{sat}(t) = \sum_{i=1}^{3^{nu}} \mu_i^{sat}(t)(\Lambda_i u(t) + \Gamma_i) \quad \text{avec} \quad u(t) = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\xi(t)) K_j x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{3^{nu}} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\mu_k^{sat}(t)((A_i - B_i\Lambda_k K_j)x(t) + B_i\Gamma_k)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & .1 \\ 0 & -1.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1.1 & .1 \\ 0 & -.8 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$u_{1max} = 2,\ u_{1min} = -2,\ u_{2max} = 3,\ u_{2min} = -3$$

$$\begin{cases} \mu_1(t) & = & \frac{(1 - \tanh(x_1(t) + x_2(t)))}{2} \\ \mu_2(t) & = & 1 - \mu_1(t) \end{cases}$$

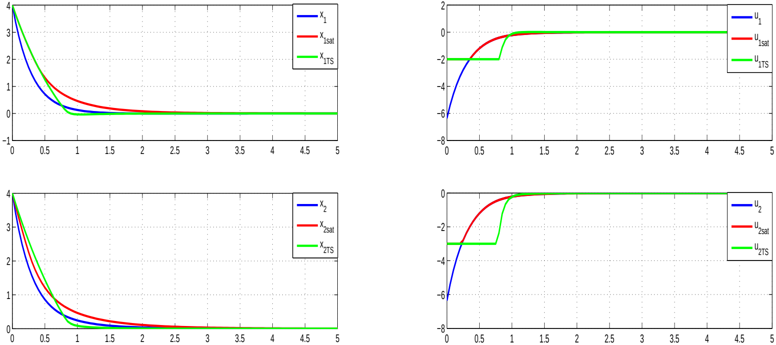


FIGURE : Cas nominal, nominal saturé et saturation T-S : états (à gauche)-commande (à droite)

Systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps :

Estimation d'état et de paramètres

Objectif

Construire un observateur pour estimer simultanément l'état et les paramètres du système

Modèle du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A(t) = A_0 + \theta(t)A_1$$

$$B(t) = B_0 + \theta(t)B_1, \ \theta(t) \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$$

A_0, A_1, B_0 et B_1 connues. La variation de $\theta(t)$ n'est pas mesurable, mais reste bornée entre deux valeurs, respectivement notées $\underline{\theta}$ et $\overline{\theta}$ connues.

Objectif

Construire un observateur pour estimer simultanément l'état et les paramètres du système

Modèle du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

$$A(t) = A_0 + \theta(t)A_1$$
$$B(t) = B_0 + \theta(t)B_1,\ \theta(t) \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$$

A_0, A_1, B_0 et B_1 connues. La variation de $\theta(t)$ n'est pas mesurable, mais reste bornée entre deux valeurs, respectivement notées $\underline{\theta}$ et $\overline{\theta}$ connues.

Cas $\theta(t)$ scalaire

$$\theta(t) = \mu_1(\theta(t))\underline{\theta} + \mu_2(\theta(t))\overline{\theta}$$

$$\begin{cases} \mu_1(\theta(t)) & = & \dfrac{\overline{\theta} - \theta(t)}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} \\ \mu_2(\theta(t)) & = & \dfrac{\theta(t) - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + \theta(t)A_1)x(t) + (B_0 + \theta(t)B_1)u(t) \\ &= (A_0 + (\mu_1(\theta(t))\underline{\theta} + \mu_2(\theta(t))\overline{\theta})A_1)x(t) + (B_0 + (\mu_1(\theta(t))\underline{\theta} + \mu_2(\theta(t))\overline{\theta})B_1)u(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\theta(t))(\overline{A}_i x(t) + \overline{B}_i u(t))}$$

$$\begin{cases} \overline{A}_1 & = & A_0 + \underline{\theta}\, A_1, \quad \overline{B}_1 = B_0 + \underline{\theta}\, B_1 \\ \overline{A}_2 & = & A_0 + \overline{\theta}\, A_1, \quad \overline{B}_2 = B_0 + \overline{\theta}\, B_1 \end{cases}$$

Cas $\theta(t)$ vectoriel

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t) A_i^1,\ B(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t) B_i^1, \quad \theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$$

Chaque paramètre $\theta_i(t)$ est exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} \theta_i(t) &= \frac{\overline{\theta}_i - \theta_i(t)}{\overline{\theta}_i - \underline{\theta}_i} \underline{\theta}_i + \frac{\theta_i(t) - \underline{\theta}_i}{\overline{\theta}_i - \underline{\theta}_i} \overline{\theta}_i \\ &= \mu_i^1(\theta_i(t))\underline{\theta}_i + \mu_i^2(\theta_i(t))\overline{\theta}_i \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} \mu_i^j(\theta_i(t))(\overline{A}_i^j x(t) + \overline{B}_i^j u(t))}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_i^1 &= A_0 + \underline{\theta}_i\ A_i^1, \quad \overline{B}_i^1 = B_0 + \underline{\theta}_i\ B_i^1 \\ \overline{A}_i^2 &= A_0 + \overline{\theta}_i\ A_i^1, \quad \overline{B}_i^2 = B_0 + \overline{\theta}_i\ B_i^1 \end{aligned}$$

Observateur d'état

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t))(\overline{A}_i\hat{x}(t) + \overline{B}_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Difficultés

- Difficultés pour établir l'erreur d'estimation $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
- Variables de décision $\theta(t)$ non mesurables

Observateur des paramètres

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t))(K_i(y(t) - \hat{y}(t)) - \alpha_i\hat{\theta}(t))$$

Ré-écriture du modèle du système

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \Big(\mu_i(\hat{\theta}(t))(\overline{A}_i x(t) + \overline{B}_i u(t)) + \Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) u(t) \Big)$$

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= \sum_{i=1}^{2} (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t)))\overline{A}_i = \mathscr{A}\Sigma_A(t) E_A \\ \Delta B(t) &= \sum_{i=1}^{2} (\mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t)))\overline{B}_i = \mathscr{B}\Sigma_B(t) E_B \end{aligned}$$

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 & \overline{A}_2 \end{bmatrix}, \ \Sigma_A(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) I_{n_x} & 0 \\ 0 & \delta_2(t) I_{n_x} \end{pmatrix}, \ E_A = \begin{bmatrix} I_{n_x} & I_{n_x} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathscr{B} = \begin{bmatrix} \overline{B}_1 & \overline{B}_2 \end{bmatrix}, \ \Sigma_B(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) I_{n_u} & 0 \\ 0 & \delta_2(t) I_{n_u} \end{pmatrix}, \ E_B = \begin{bmatrix} I_{n_u} & I_{n_u} \end{bmatrix}^T$$

$$\delta_i(t) = \mu_i(\theta(t)) - \mu_i(\hat{\theta}(t)), \quad -1 \leq \delta_i(t) \leq 1$$

$$\Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I$$
$$\Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I$$

Erreurs d'estimation

$$e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$
$$e_\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$$

Dynamique des erreurs

$$\dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t))((\overline{A}_i - L_i C)e_x(t) + \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t))$$
$$\dot{e}_\theta(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t))(\dot{\theta}(t) - K_i C e_x(t) + \alpha_i \theta(t) - \alpha_i e_\theta(t))$$

Vecteur des erreurs augmenté

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & e_\theta^T(t) \end{bmatrix}^T$$

Système augmenté

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t))\Phi_i e_a(t) + \mathscr{B}_i(t)\omega(t)$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \overline{A}_i - L_i C & 0 \\ -K_i C & -\alpha I \end{pmatrix}, \; \mathscr{B}_i(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & 0 & 0 & \Delta B(t) \\ 0 & \alpha_i I & I & 0 \end{pmatrix}, \; \omega(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

Fonction de Lyapunov

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), \; P = P^T > 0, P = \mathrm{diag}(P_0, P_1)$$

Atténuation $\mathscr{L}_2$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \left(e_a^T(t)(\Phi_i^T P + P\Phi_i)e_a(t) + e_a^T(t)P\mathscr{B}_i(t)\omega(t) + \omega^T(t)\mathscr{B}_i^T(t)Pe_a(t) \right)$$

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & e_\theta^T(t) \end{bmatrix}^T,\ \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) & \dot{\theta}^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{V}(t) + e_a^T(t)\Gamma_1 e_a(t) - \omega^T(t)\Gamma_2\omega(t) < 0$$

$$\begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} \Phi_i^T P + P\Phi_i + \Gamma_1 & P\mathscr{B}_i(t) \\ \mathscr{B}_i^T(t)P & -\Gamma_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0$$

Difficulté et Solution

- Termes constants et variants dans le temps
- Séparer l'influence des termes variants dans le temps et les majorer

Atténuation $\mathscr{L}_2$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \left(e_a^T(t)(\Phi_i^T P + P\Phi_i)e_a(t) + e_a^T(t)P\mathscr{B}_i(t)\omega(t) + \omega^T(t)\mathscr{B}_i^T(t)Pe_a(t) \right)$$

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & e_\theta^T(t) \end{bmatrix}^T, \ \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) & \dot{\theta}^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{V}(t) + e_a^T(t)\Gamma_1 e_a(t) - \omega^T(t)\Gamma_2\omega(t) < 0$$

$$\begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} \Phi_i^T P + P\Phi_i + \Gamma_1 & P\mathscr{B}_i(t) \\ \mathscr{B}_i^T(t)P & -\Gamma_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0$$

Difficulté et Solution

- Termes constants et variants dans le temps
- Séparer l'influence des termes variants dans le temps et les majorer

Atténuation $\mathscr{L}_2$

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \left(e_a^T(t)(\Phi_i^T P + P\Phi_i)e_a(t) + e_a^T(t)P\mathscr{B}_i(t)\omega(t) + \omega^T(t)\mathscr{B}_i^T(t)Pe_a(t) \right)$$

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e_x^T(t) & e_\theta^T(t) \end{bmatrix}^T, \ \omega(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \theta^T(t) & \dot{\theta}^T(t) & u^T(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{V}(t) + e_a^T(t)\Gamma_1 e_a(t) - \omega^T(t)\Gamma_2\omega(t) < 0$$

$$\begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} \Phi_i^T P + P\Phi_i + \Gamma_1 & P\mathscr{B}_i(t) \\ \mathscr{B}_i^T(t)P & -\Gamma_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_a(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} < 0$$

Difficulté et Solution

- Termes constants et variants dans le temps
- Séparer l'influence des termes variants dans le temps et les majorer

Problème à résoudre

$$\min_{P_0, P_1, R_i, F_i, \overline{\alpha}_i, \Gamma_i^j} \beta$$

sous les contraintes LMI ($i = 1, 2$)

$$\begin{pmatrix} M_i^1 & -C^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 \mathscr{A} & P_0 \mathscr{B} \\ * & -\overline{\alpha}_i - \overline{\alpha}_i^T + \Gamma_1^1 & 0 & \overline{\alpha}_i & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0 + \lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3 + \lambda_2 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_{i1} I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_{i2} I \end{pmatrix} < 0$$

$$\Gamma_2^j < \beta (j = 0, 1, 2, 3)$$

$$M_i^1 = P_0 \overline{A}_i + \overline{A}_i^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + \Gamma_1^0$$

Gains des observateurs : $L_i = P_0^{-1} R_i,\ K_i = P_1^{-1} F_i,\ \alpha_i = P_1^{-1} \overline{\alpha}_i$

Propriété de somme convexe

$$\mu_2(t) = 1 - \mu_1(t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \Big(\mu_1(\hat{\theta}(t))(\overline{A}_i x(t) + \overline{B}_i u(t)) + \Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) u(t) \Big)$$

$$\Delta A(t) = \delta_1(t)(\overline{A}_1 - \overline{A}_2)$$

$$\Delta B(t) = \delta_1(t)(\overline{B}_1 - \overline{B}_2)$$

$$\delta_1(t) = \mu_1(\theta(t)) - \mu_1(\hat{\theta}(t))$$

Conditions relaxées

$$\min_{P_0,P_1,R_i,F_i,\overline{\alpha}_i,\Gamma_i^j} \beta$$

sous les contraintes LMI (i=1,2)

$$\begin{pmatrix} M_i^1 & -C^TF_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0 & P_0 \\ * & -\overline{\alpha}_i-\overline{\alpha}_i^T+\Gamma_1^1 & 0 & \overline{\alpha}_i & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0+\Lambda_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3+\Lambda_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Lambda_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} < 0$$

$\Gamma_2^j < \beta (j=0,1,2,3)$

$M_i^1 = P_0\overline{A}_i + \overline{A}_i^T P_0 - R_iC - C^TR_i^T + \Gamma_1^0$

$\Lambda_A = (\overline{A}_1-\overline{A}_2)^T\Lambda_1(\overline{A}_1-\overline{A}_2),\ \Lambda_B = (\overline{B}_1-\overline{B}_2)^T\Lambda_2(\overline{B}_1-\overline{B}_2)$

Gains des observateurs : $L_i = P_0^{-1}R_i,\ K_i = P_1^{-1}F_i,\ \alpha_i = P_1^{-1}\overline{\alpha}_i$

Systèmes non linéaires sous forme T-S à paramètres variants dans le temps :
Estimation d'état et de paramètres

Modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i(t)x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

$$A_i(t) = A_i + \theta(t)\overline{A}_i$$

$$B_i(t) = B_i + \theta(t)\overline{B}_i,\ \theta(t) \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$$

Système T-S

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2} \mu_i(x(t))\mu_j(\theta(t))(\mathscr{A}_{ij}x(t) + \mathscr{B}_{ij}u(t))$$

$$\begin{cases} \mathscr{A}_{i1} &= A_i + \underline{\theta}\ \overline{A}_i,\ \mathscr{B}_{i1} = B_i + \underline{\theta}\ \overline{B}_i \\ \mathscr{A}_{i2} &= A_i + \overline{\theta}\ \overline{A}_i,\ \mathscr{B}_{i2} = B_i + \overline{\theta}\ \overline{B}_i \end{cases}$$

Difficultés

- Variables de décision non mesurables ($x(t)$ et $\theta(t)$)

Observateurs

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) & = & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2}\mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(\hat{\theta}(t))(\mathscr{A}_{ij}\hat{x}(t)+\mathscr{B}_{ij}u(t)+L_i(y(t)-\hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) & = & C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \sum_{j=1}^{2}\mu_i(\hat{\theta}(t))(K_j(y(t)-\hat{y}(t))-\alpha_j\hat{\theta}(t))$$

LMIs à résoudre

$$\min_{P_0,P_1,R_i,F_i,\overline{\alpha}_i,\Gamma_j^k} \beta$$

sous les contraintes LMI ($i=1:r, j=1,2$)

$$\begin{pmatrix} M_{i\,j}^1 & -C^T F_j^T & 0 & 0 & 0 & 0 & P_0\mathscr{A} & P_0\mathscr{B} \\ * & -\overline{\alpha}_j-\overline{\alpha}_j^T+\Gamma_1^1 & 0 & \overline{\alpha}_j & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\Gamma_2^0+\lambda_1 E_A^T E_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Gamma_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Gamma_2^3+\lambda_2 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -\lambda_2 I \end{pmatrix} < 0$$

$$\Gamma_2^k < \beta (k=0,1,2,3)$$

$$M_{i\,j}^1 = P_0\overline{A}_{ij} + \overline{A}_{ij}^T P_0 - R_i C - C^T R_i^T + \Gamma_1^0$$

$$L_i = P_0^{-1} R_i,\ K_j = P_1^{-1} F_j,\ \alpha_j = P_1^{-1}\overline{\alpha}_j$$

Simulations

Exemple académique

Considérons le système suivant :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.3 & -1 & -0.3 \\ 0.1 & -2 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \end{pmatrix}, A_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ varient entre $[0,1]$.

Cas nominal : $\dot{x}_n(t) = A_0 x_n(t) + Bu(t)$

Cas variations paramétriques : $\dot{x}_v(t) = (A_0 + \theta_1(t)A_1^1 + \theta_2(t)A_2^1)x_v(t) + Bu(t)$

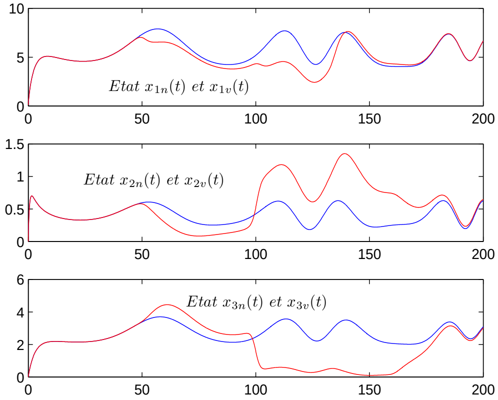


FIGURE : Système nominal (bleu) -avec variation paramétrique (rouge)

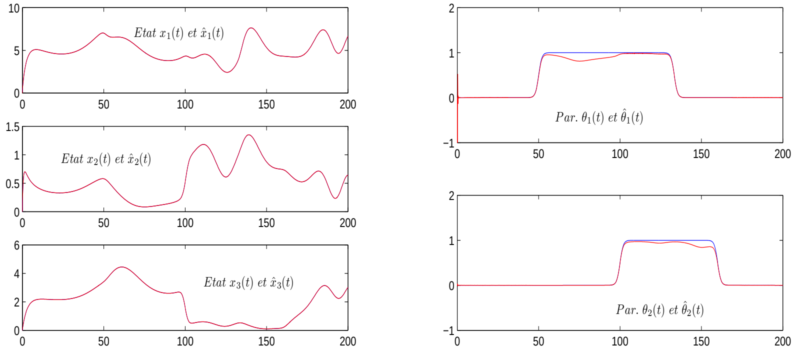


FIGURE : Etats et leurs estimées (gauche)-Paramètres θ et leurs estimées (droite)

Système non linéaire (simplifié) : estimation d'état d'un bioréacteur simplifié

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{ax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} - x_1(t)u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{cax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b} + (d - x_2(t))u(t)\end{aligned}$$

$x_1(t)$ la concentration en biomasse et $x_2(t)$ la concentration en substrat.

Commande $u(t)$: taux de dilution de l'entrée.

$a = 0.5$, $b = 0.07$, $c = 0.7$ et $d = 2.5$.

sortie $y(t) = x_1(t)$ ($x_2(t)$ non mesurable).

Mise sous forme de modèle T-S

$$\begin{aligned}z_1(t) &= -u(t)\\ z_2(t) &= \frac{ax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b}\\ z_3(t) &= -u(t) - \frac{cax_1(t)x_2(t)}{x_2(t)+b}\end{aligned}$$

$2^3 = 8$ sous-modèles.

Mise sous forme de modèle T-S

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{8} (A_i x(t) + B u(t))$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.2 & 15 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 15 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.004 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.004 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 0.004 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0.004 \\ 0 & -1.72 \end{pmatrix}, B_i = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Erreurs de modélisation : $A_i(t) = A_i + \theta(t)\overline{A}_i$.

$$\overline{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\theta(t)$ paramètre variant entre $[0,1]$.

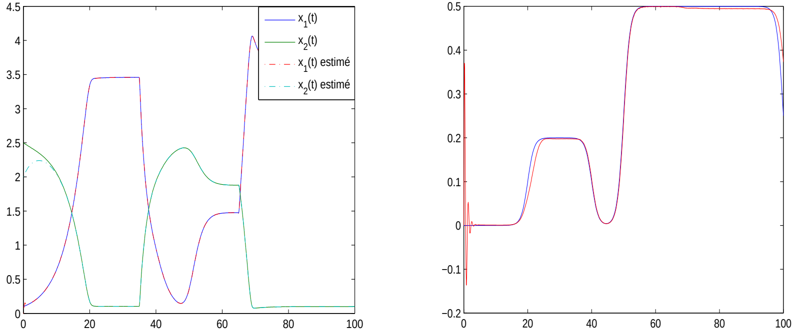


FIGURE : Etats et leurs estimées (gauche)-Paramètres θ et son estimée (droite)

Conclusions

- Nouvelle approche systématique pour le traitement des non-linéarités (saturation de commande et variations paramétriques).
- Méthode basée sur la ré-écriture sous forme de modèles T-S (par secteur non linéaires).
- Transformation en problème d'optimisation sous contraintes LMI (Inégalités Matricielles Linéaires).

Perspectives

- Application à la commande FTC pour la poursuite de modèle de référence.
- Présence de bruits de mesure.
- Application au diagnostic (résidus et bancs d'observateurs).
- Utilisation de fonctions de Lyapunov permettant de relaxer les conditions LMI.

Merci pour votre attention

Quelques références sur les modèles T-S

1. T. A. Johansen, A.B Foss. Identification of non-linear system structure and parameters using regime decomposition. Automatica, 1995.
2. K. Tanaka, H.O. Wang. Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach. Ed. John Wiley and Sons, Inc, 2001.
3. A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin. Estimation d'état et d'entrées inconnues d'un système non linéaire représenté sous forme multimodèle. CIFA, 2004.
4. J. Li, C. Bo, J. Zhang and J. Du. Fault Diagnosis and Accommodation Based on Online Multi-model for Nonlinear Process. Lecture Notes in Computer Science, 2006.
5. Z. Petres. Polytopic Decomposition of Linear Parameter-Varying Models by Tensor-Product Model Transformation. Ph.D. Dissertation, 2006.
6. R. Orjuela, D. Maquin, J. Ragot. Nonlinear system identification using uncoupled state multiple-model approach. Workshop on Advanced Control and Diagnosis, 2006.
7. D. Saifia, M. Chadli, S. labiod. H_∞ Control of Multiple Model Subject to Actuator Saturation : Application to Quarter-Car Suspension System. Journal of Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2011.
8. E. Naderi, N. Meskin, K. Khorasani. Nonlinear Fault Diagnosis of Jet Engines by Using a Multiple Model-Based Approach, J. Eng. Gas Turbines Power, 2012.
9. A.M. Nagy, G. Mourot, G. Schutz, J. Ragot. Exact activated sludge reactor modeling using a multiple model. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2010.
10. S. Tarbouriech, G. Garcia, J.M. Gomes da Silva Jr. I. Queinnec. Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators. Springer-Verlag, 2011.