

# Instrumentation de systèmes complexes pour l'observabilité et la tolérance aux défauts

Abbas Chamseddine, Hassan Noura, Mustapha Ouladsine

Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III  
Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes  
LSIS - UMR CNRS 6168

# Motivation et objectif :

## Motivation :

- Les systemes industriels sont de plus en plus complexes
- Les systemes automatises sont souvent soumis a des defauts

## Necessite :

Diagnostic  
↓  
Suffisamment d'informations (capteurs) a propos de l'etat des systemes  
↓  
**Probleme d'instrumentation**

## Objectif du travail :

Etudier le probleme d'instrumentation des systemes complexes pour :

- Le diagnostic et la tolerance aux defauts

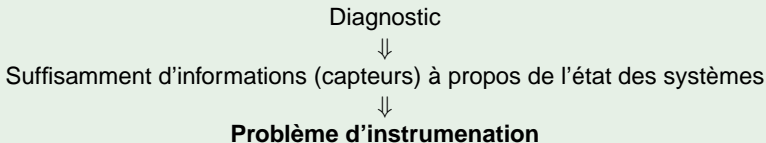


# Motivation et objectif :

## Motivation :

- Les systèmes industriels sont de plus en plus complexes
- Les systèmes automatisés sont souvent soumis à des défauts

## Nécessité :



## Objectif du travail :

Étudier le problème d'instrumentation des systèmes complexes pour :

- Le diagnostic et la tolérance aux défauts

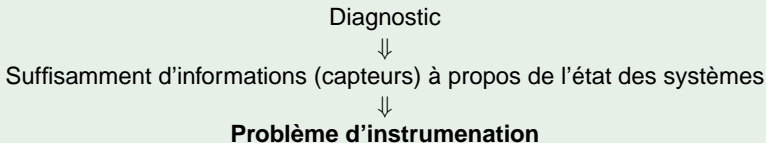


# Motivation et objectif :

## Motivation :

- Les systèmes industriels sont de plus en plus complexes
- Les systèmes automatisés sont souvent soumis à des défauts

## Nécessité :



## Objectif du travail :

Étudier le problème d'instrumentation des systèmes complexes pour :

- Le diagnostic et la tolérance aux défauts



# Plan de la présentation

## 1 Systèmes complexes

- Définition
- Exemple : système de suspension active du véhicule

## 2 Instrumentation de systèmes complexes

- Préliminaires
- Réseau de capteurs minimal
- Réseau de capteurs tolérant

## 3 Conclusion et perspectives

# Plan de la présentation

## 1 Systèmes complexes

- Définition
- Exemple : système de suspension active du véhicule

## 2 Instrumentation de systèmes complexes

- Préliminaires
- Réseau de capteurs minimal
- Réseau de capteurs tolérant

## 3 Conclusion et perspectives

# Plan de la présentation

- 1 Systèmes complexes
  - Définition
  - Exemple : système de suspension active du véhicule
- 2 Instrumentation de systèmes complexes
  - Préliminaires
  - Réseau de capteurs minimal
  - Réseau de capteurs tolérant
- 3 Conclusion et perspectives

# Qu'est-ce qu'un système complexe ?

## Un système complexe peut être :

- Un système ou un phénomène difficile à analyser ou à comprendre
- **Un système de grande dimension**
- **Un système composé de sous-systèmes interconnectés**

## Exemples de systèmes complexes :

- Une société
- Un écosystème
- Le climat
- Une organisation
- Un processus industriel

Nous nous intéressons uniquement aux systèmes mécaniques et industriels et plus précisément aux systèmes continus.





# Qu'est-ce qu'un système complexe ?

## Un système complexe peut être :

- Un système ou un phénomène difficile à analyser ou à comprendre
- **Un système de grande dimension**
- **Un système composé de sous-systèmes interconnectés**

## Exemples de systèmes complexes :

- Une société
- Un écosystème
- Le climat
- Une organisation
- Un processus industriel

Nous nous intéressons uniquement aux systèmes mécaniques et industriels et plus précisément aux systèmes continus.

# Qu'est-ce qu'un système complexe ?

## Un système complexe peut être :

- Un système ou un phénomène difficile à analyser ou à comprendre
- **Un système de grande dimension**
- **Un système composé de sous-systèmes interconnectés**

## Exemples de systèmes complexes :

- Une société
- Un écosystème
- Le climat
- Une organisation
- Un processus industriel

Nous nous intéressons uniquement aux systèmes mécaniques et industriels et plus précisément aux systèmes continus.



# Représentation des systèmes complexes

Dans la littérature, les systèmes complexes sont représentés par :

**Cas linéaire [Mirkin-2005] :**

$$(SS_i) \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1; j \neq i}^N A_{ij} x_j(t) & i = 1, 2, \dots, N \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases}$$

**Cas non linéaire [Khalil-1982] :**

$$(SS_i) \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\tau, x_i) + B_i u_i + \sum_{j=1; j \neq i}^N g_{ij}(\tau, x_j) & i = 1, 2, \dots, N \\ y_i(t) = h_i(x_i) \end{cases}$$

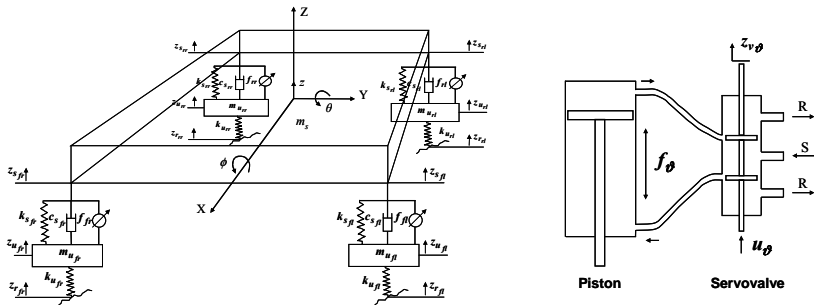


# Exemple de système complexe : le véhicule

## Le véhicule est un système :

- de grande dimension
- d'un nombre relativement grand d'entrées et de sorties

Le système de suspension du véhicule [Güçlü-2003], [Alleyne-1995] :



# Modèle du système

Le système est non linéaire d'ordre 22.

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) + Fz_r(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$x$  est le vecteur d'état :

$x_{4k+1} = z_{u,\vartheta}$  : position verticale de la masse non suspendue,

$x_{4k+2} = \dot{z}_{u,\vartheta}$  : vitesse verticale de la masse non suspendue,

$x_{4k+3} = A_{\vartheta}$  : pression de l'actionneur,

$x_{4k+4} = z_{v,\vartheta}$  : position de la tige, avec  $(k, \vartheta) = \{(0, fr), (1, fl), (2, rr), (3, rl)\}$

$x_{17} = z$  : position verticale de la masse suspendue,

$x_{18} = \dot{z}$  : vitesse verticale de la masse suspendue,

$x_{19} = \theta$  : angle de tangage de la masse suspendue,

$x_{20} = \dot{\theta}$  : vitesse angulaire de tangage de la masse suspendue,

$x_{21} = \phi$  : angle de roulis de la masse suspendue,

$x_{22} = \dot{\phi}$  : vitesse angulaire de roulis de la masse suspendue.



# Modèle du système

Le système est non linéaire d'ordre 22.

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t) + Fz_r(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$x$  est le vecteur d'état :

$x_{4k+1} = z_{u,\vartheta}$  : position verticale de la masse non suspendue,

$x_{4k+2} = \dot{z}_{u,\vartheta}$  : vitesse verticale de la masse non suspendue,

$x_{4k+3} = A_{\vartheta}$  : pression de l'actionneur,

$x_{4k+4} = z_{v,\vartheta}$  : position de la tige, avec  $(k, \vartheta) = \{(0, fr), (1, fl), (2, rr), (3, rl)\}$

$x_{17} = z$  : position verticale de la masse suspendue,

$x_{18} = \dot{z}$  : vitesse verticale de la masse suspendue,

$x_{19} = \theta$  : angle de tangage de la masse suspendue,

$x_{20} = \dot{\theta}$  : vitesse angulaire de tangage de la masse suspendue,

$x_{21} = \phi$  : angle de roulis de la masse suspendue,

$x_{22} = \dot{\phi}$  : vitesse angulaire de roulis de la masse suspendue.





# Remarque

Deux approches de commande et de diagnostic de défauts capteurs ont été proposées pour le système.

## Hypothèse :

- Quinze capteurs sont utilisés :
  - 5 accéléromètres
  - 2 gyromètres
  - 4 LVDT
  - 4 capteurs de pression

## Problème :

- Contraintes de coût et d'emplacement des capteurs

## Nécessité :

- Traitement du problème d'instrumentation des systèmes





# Remarque

Deux approches de commande et de diagnostic de défauts capteurs ont été proposées pour le système.

## Hypothèse :

- Quinze capteurs sont utilisés :
  - 5 accéléromètres
  - 2 gyromètres
  - 4 LVDT
  - 4 capteurs de pression

## Problème :

- Contraintes de coût et d'emplacement des capteurs

## Nécessité :

- Traitement du problème d'instrumentation des systèmes



# Remarque

Deux approches de commande et de diagnostic de défauts capteurs ont été proposées pour le système.

## Hypothèse :

- Quinze capteurs sont utilisés :
  - 5 accéléromètres
  - 2 gyromètres
  - 4 LVDT
  - 4 capteurs de pression

## Problème :

- Contraintes de coût et d'emplacement des capteurs

## Nécessité :

- Traitement du problème d'instrumentation des systèmes



# Remarque

Deux approches de commande et de diagnostic de défauts capteurs ont été proposées pour le système.

## Hypothèse :

- Quinze capteurs sont utilisés :
  - 5 accéléromètres
  - 2 gyromètres
  - 4 LVDT
  - 4 capteurs de pression

## Problème :

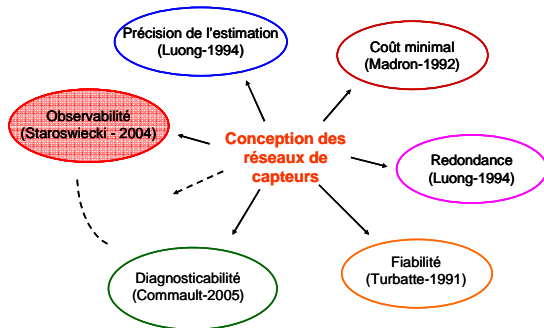
- Contraintes de coût et d'emplacement des capteurs

## Nécessité :

- Traitement du problème d'instrumentation des systèmes



# Instrumentation des systèmes : état de l'art



M. Staroswiecki, G. Hoblos and A. Aitouche

Sensor network design for fault tolerant estimation

*International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004.



# Observabilité : extension aux systèmes complexes

## Dans [Staroswiecki-2004] :

Conception, pour les systèmes linéaires, d'un réseau de capteurs ayant :

- Degré de redondance matérielle
- Degré de fiabilité



M. Staroswiecki, G. Hoblos and A. Aitouche

Sensor network design for fault tolerant estimation

*International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004.

## Problème :

Pour les systèmes non linéaires de grande dimension :

- tester hors ligne l'observabilité peut être irréalisable
- difficile de construire un observateur pour le système complet
- l'estimation en ligne peut imposer des calculs très lourds



# Observabilité : extension aux systèmes complexes

## Dans [Staroswiecki-2004] :

Conception, pour les systèmes linéaires, d'un réseau de capteurs ayant :

- Degré de redondance matérielle
- Degré de fiabilité



M. Staroswiecki, G. Hoblos and A. Aitouche

Sensor network design for fault tolerant estimation

*International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004.

## Problème :

Pour les systèmes non linéaires de grande dimension :

- tester hors ligne l'observabilité peut être irréalisable
- difficile de construire un observateur pour le système complet
- l'estimation en ligne peut imposer des calculs très lourds



# Motivation et objectif

## Dans ce travail :

Extension aux systemes constitues de sous-systemes interconnectes :

- Reseau de capteurs minimal (**Observabilite**)
- Reseau de capteurs tolerant (**Observabilite**)

## Objectif :

Verifier l'observabilite des systemes tout en minimisant le nombre des capteurs et le cout de l'installation.

## Idée :

- decomposer le systeme complexe en sous-systemes interconnectes
- formuler ce probleme en probleme d'optimisation binaire non lineaire



# Motivation et objectif

## Dans ce travail :

Extension aux systèmes constitués de sous-systèmes interconnectés :

- Réseau de capteurs minimal (**Observabilité**)
- Réseau de capteurs tolérant (**Observabilité**)

## Objectif :

Vérifier l'observabilité des systèmes tout en minimisant le nombre des capteurs et le coût de l'installation.

## Idée :

- décomposer le système complexe en sous-systèmes interconnectés
- formuler ce problème en problème d'optimisation binaire non linéaire





# Motivation et objectif

## Dans ce travail :

Extension aux systemes constitues de sous-systemes interconnectes :

- Reseau de capteurs minimal (**Observabilite**)
- Reseau de capteurs tolerant (**Observabilite**)

## Objectif :

Verifier l'observabilite des systemes tout en minimisant le nombre des capteurs et le cout de l'installation.

## Idée :

- decomposer le systeme complexe en sous-systemes interconnectes
- formuler ce probleme en probleme d'optimisation binaire non lineaire

# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

Idée :

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$



# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

Idée :

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$

# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

Idée :

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$



# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

## Idée :

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$

# Pourquoi parler des entrées externes ?

Si un système de grande dimension :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

est décomposé en  $N$  sous-systèmes :

$$(SS_i) \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1; j \neq i}^N A_{ij} x_j(t) & i = 1, 2, \dots, N \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases}$$

Le terme  $\sum_{j=1; j \neq i}^N A_{ij} x_j(t)$  représente les interconnexions (**entrées externes**) de  $(SS_i)$  avec les autres sous-systèmes.



# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

## Exemple :

Supposons que  $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors  $C$  doit être  $C = (1 \ 0 \ 0)$  ou  
 $C = (0 \ 1 \ 0)$  pour que la deuxième condition soit vérifiée.



# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

## Exemple :

Supposons que  $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors  $C$  doit être  $C = (1 \ 0 \ 0)$  ou

$C = (0 \ 1 \ 0)$  pour que la deuxième condition soit vérifiée.



# Observabilité en présence d'entrées externes

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

## Observabilité de (S) :

(S) est observable si :

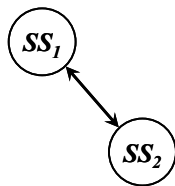
- $\text{rang}(MO) = n$        $MO$  est la matrice d'observabilité
- $\text{rang}(CF) = \text{rang}(F)$       (*Matching Condition*)

## Exemple :

Supposons que  $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors  $C$  doit être  $C = (1 \ 0 \ 0)$  ou  
 $C = (0 \ 1 \ 0)$  pour que **la deuxième condition** soit vérifiée.

## Deux systèmes interconnectés (1/2)

Considérons deux systèmes interconnectés  $SS_1$  et  $SS_2$ , avec  $n_1 = n_2 = 3$ .



Supposons que leurs dynamiques sont données par :

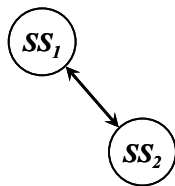
$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$(SS_2) \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 + F_2 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}$$



## Deux systèmes interconnectés (1/2)

Considérons deux systèmes interconnectés  $SS_1$  et  $SS_2$ , avec  $n_1 = n_2 = 3$ .



Supposons que leurs dynamiques sont données par :

$$\begin{aligned}
 (SS_1) \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases} \\
 (SS_2) \quad & \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 + F_2 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



## Deux systèmes interconnectés (2/2)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

La deuxième condition  $\text{rang}(C_1 F_1) = \text{rang}(F_1)$  peut être vérifiée pour :

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ou  $C_1 = (1 \ 0 \ 0)$  et  $C_2 = (0 \ 0 \ 1)$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ou également pour  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = (0)$ , etc.



## Deux systèmes interconnectés (2/2)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

La deuxième condition  $\text{rang}(C_1 F_1) = \text{rang}(F_1)$  peut être vérifiée pour :

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ou également pour  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ , etc.



## Deux systèmes interconnectés (2/2)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

La deuxième condition  $\text{rang}(C_1 F_1) = \text{rang}(F_1)$  peut être vérifiée pour :

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ou  $C_1 = (1 \ 0 \ 0)$  et  $C_2 = (0 \ 0 \ 1)$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ou également pour  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = (0)$ , etc.



## Deux systèmes interconnectés (2/2)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

La deuxième condition  $\text{rang}(C_1 F_1) = \text{rang}(F_1)$  peut être vérifiée pour :

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ou  $C_1 = (1 \ 0 \ 0)$  et  $C_2 = (0 \ 0 \ 1)$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ou également pour  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = (0)$ , etc.



## Deux systèmes interconnectés (2/2)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

La deuxième condition  $\text{rang}(C_1 F_1) = \text{rang}(F_1)$  peut être vérifiée pour :

- $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ou  $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ou  $C_1 = (1 \ 0 \ 0)$  et  $C_2 = (0 \ 0 \ 1)$ . Dans ce cas  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- ou également pour  $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dans ce cas  $F_1 = (0)$ , etc.





# Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .

## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnection (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnection  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .





## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (1/3)

Les dynamiques de  $SS_1$  :

$$(SS_1) \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{21} + x_{22} + x_{23} \\ x_{23} \end{pmatrix} \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

Définissons la matrice d'interconnexion  $M_{21}$  comme suit :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} - & | & x_{21} & | & x_{22} & | & x_{23} \\ x_{11} & | & 1 & | & 1 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{12} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ - & | & - & | & - & | & - \\ x_{13} & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{21}$  représente l'influence de  $SS_2$  sur  $SS_1$ .



## Matrice d'interconnexion (2/3)

Pour la matrice  $MI_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{MI}_{21}$  comme suit :

$$\overline{MI}_{21} = MI_{21} - C_1 MI_{21}$$

$$\text{Si } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MI_{21} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline - & - & - & - \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$C_1 MI_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{MI}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'interconnexion (2/3)

Pour la matrice  $M_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{M}_{21}$  comme suit :

$$\overline{M}_{21} = M_{21} - C_1 M_{21}$$

$$\text{Si } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_{21} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline - & - & - & - \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$C_1 M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{M}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Matrice d'interconnexion (2/3)

Pour la matrice  $MI_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{MI}_{21}$  comme suit :

$$\overline{MI}_{21} = MI_{21} - C_1 MI_{21}$$

$$\text{Si } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MI_{21} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline - & - & - & - \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$C_1 MI_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{MI}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'interconnexion (2/3)

Pour la matrice  $MI_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{MI}_{21}$  comme suit :

$$\overline{MI}_{21} = MI_{21} - C_1 MI_{21}$$

$$\text{Si } C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } MI_{21} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \hline - & - & - & - \\ x_{11} & 1 & 1 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{12} & 0 & 0 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ x_{13} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$C_1 MI_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{MI}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'interconnexion (3/3)

La matrice  $\overline{M}l_{21}$  est définie :

$$\overline{M}l_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21}$$

Pour la matrice  $\overline{M}l_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{\overline{M}}l_{21}$  :

$$\overline{\overline{M}}l_{21} = \overline{M}l_{21} - \overline{M}l_{21} C_2$$

$$\text{Si } C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{M}l_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{M}l_{21} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{\overline{M}}l_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





## Matrice d'interconnexion (3/3)

La matrice  $\overline{Ml}_{21}$  est définie :

$$\overline{Ml}_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21}$$

Pour la matrice  $\overline{Ml}_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{\overline{Ml}}_{21}$  :

$$\overline{\overline{Ml}}_{21} = \overline{Ml}_{21} - \overline{Ml}_{21} C_2$$

Si  $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\overline{Ml}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\overline{Ml}_{21} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{\overline{Ml}}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'interconnexion (3/3)

La matrice  $\overline{Ml}_{21}$  est définie :

$$\overline{Ml}_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21}$$

Pour la matrice  $\overline{Ml}_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{\overline{Ml}}_{21}$  :

$$\overline{\overline{Ml}}_{21} = \overline{Ml}_{21} - \overline{Ml}_{21} C_2$$

$$\text{Si } C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{Ml}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{Ml}_{21} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{\overline{Ml}}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



## Matrice d'interconnexion (3/3)

La matrice  $\overline{Ml}_{21}$  est définie :

$$\overline{Ml}_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21}$$

Pour la matrice  $\overline{Ml}_{21}$ , définissons la matrice  $\overline{\overline{Ml}}_{21}$  :

$$\overline{\overline{Ml}}_{21} = \overline{Ml}_{21} - \overline{Ml}_{21} C_2$$

$$\text{Si } C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{Ml}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{Ml}_{21} C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \overline{\overline{Ml}}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Problème d'optimisation (1/3)

Puisque :

$$\overline{M}l_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21}$$

et puisque :

$$\overline{\overline{M}}l_{21} = \overline{M}l_{21} - \overline{M}l_{21} C_2$$

alors :

$$\overline{\overline{M}}l_{21} = Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2$$

Le problème d'instrumentation devient alors :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(C_1) + rang(C_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0 \end{cases}$$

La fonction à minimiser et les contraintes sont sous forme matricielle.



## Problème d'optimisation (2/3)

1) Nous avons  $C_1 = \begin{pmatrix} \delta_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1^3 \end{pmatrix}$  et  $C_2 = \begin{pmatrix} \delta_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^3 \end{pmatrix}$  avec  $\delta_i^j \in \{0, 1\}$

Alors  $\text{rang}(C_1) + \text{rang}(C_2) = \sum_{i=1}^3 \delta_1^i + \sum_{i=1}^3 \delta_2^i$

2) Pour cet exemple particulier :  $Ml_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La contrainte  $Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0$  devient :

$$\overline{Ml}_{21} = \begin{pmatrix} 1 - \delta_1^1 - \delta_2^1 + \delta_1^1 \delta_2^1 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^2 + \delta_1^1 \delta_2^2 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^3 + \delta_1^1 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^2 - \delta_2^3 + \delta_1^2 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^3 - \delta_2^3 + \delta_1^3 \delta_2^3 \end{pmatrix} \equiv 0$$



## Problème d'optimisation (2/3)

1) Nous avons  $C_1 = \begin{pmatrix} \delta_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1^3 \end{pmatrix}$  et  $C_2 = \begin{pmatrix} \delta_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^3 \end{pmatrix}$  avec  $\delta_i^j \in \{0, 1\}$

Alors  $\text{rang}(C_1) + \text{rang}(C_2) = \sum_{i=1}^3 \delta_1^i + \sum_{i=1}^3 \delta_2^i$

2) Pour cet exemple particulier :  $Ml_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La contrainte  $Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0$  devient :

$$\overline{Ml}_{21} = \begin{pmatrix} 1 - \delta_1^1 - \delta_2^1 + \delta_1^1 \delta_2^1 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^2 + \delta_1^1 \delta_2^2 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^3 + \delta_1^1 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^2 - \delta_2^3 + \delta_1^2 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^3 - \delta_2^3 + \delta_1^3 \delta_2^3 \end{pmatrix} \equiv 0$$



## Problème d'optimisation (2/3)

1) Nous avons  $C_1 = \begin{pmatrix} \delta_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1^3 \end{pmatrix}$  et  $C_2 = \begin{pmatrix} \delta_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2^3 \end{pmatrix}$  avec  $\delta_i^j \in \{0, 1\}$

Alors  $\text{rang}(C_1) + \text{rang}(C_2) = \sum_{i=1}^3 \delta_1^i + \sum_{i=1}^3 \delta_2^i$

2) Pour cet exemple particulier :  $Ml_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La contrainte  $Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0$  devient :

$$\overline{\overline{Ml}}_{21} = \begin{pmatrix} 1 - \delta_1^1 - \delta_2^1 + \delta_1^1 \delta_2^1 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^2 + \delta_1^1 \delta_2^2 & 1 - \delta_1^1 - \delta_2^3 + \delta_1^1 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^2 - \delta_2^3 + \delta_1^2 \delta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 - \delta_1^3 - \delta_2^3 + \delta_1^3 \delta_2^3 \end{pmatrix} \equiv 0$$



## Problème d'optimisation (3/3)

Le problème d'optimisation :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } \mathit{rang}(C_1) + \mathit{rang}(C_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0 \end{cases}$$

devient alors :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } \sum_{i=1}^3 \delta_1^i + \sum_{i=1}^3 \delta_2^i \\ \text{Sous les contraintes} \\ 1 - \delta_1^1 - \delta_2^1 + \delta_1^1 \delta_2^1 = 0 \\ 1 - \delta_1^1 - \delta_2^2 + \delta_1^1 \delta_2^2 = 0 \\ 1 - \delta_1^1 - \delta_2^3 + \delta_1^1 \delta_2^3 = 0 \\ 1 - \delta_1^2 - \delta_2^3 + \delta_1^2 \delta_2^3 = 0 \\ 1 - \delta_1^3 - \delta_2^3 + \delta_1^3 \delta_2^3 = 0 \end{cases}$$

avec  $\delta_i^j \in \{0, 1\}$ . Ce problème est un problème d'optimisation binaire non linéaire.



## Remarque 1

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

**Idée :**

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$

Pour le problème d'optimisation :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(C_1) + rang(C_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0 \end{cases}$$

Nous remplaçons  $C_i$  par  $\bar{C}_i$  :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(\bar{C}_1) + rang(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - \bar{C}_1 Ml_{21} - Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{C}_1 Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

## Remarque 1

Un système linéaire :

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fd \\ y = Cx \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $d$  est un vecteur d'entrées inconnues.

### Idée :

La matrice  $C$  (l'ensemble des capteurs utilisés) peut alors être décomposée :

- $\bar{C}$  et  $\bar{\bar{C}}$

Pour le problème d'optimisation :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(C_1) + \text{rang}(C_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - C_1 Ml_{21} - Ml_{21} C_2 + C_1 Ml_{21} C_2 \equiv 0 \end{cases}$$

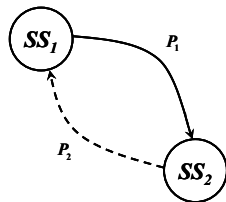
Nous remplaçons  $C_i$  par  $\bar{C}_i$  :

$$(Pr) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{C}_1) + \text{rang}(\bar{C}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - \bar{C}_1 Ml_{21} - Ml_{21} \bar{C}_2 + \bar{C}_1 Ml_{21} \bar{C}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

## Remarque 2

Deux chemins possibles peuvent être parcourus pour la conception du réseau :

- de  $SS_1$  à  $SS_2$
- de  $SS_2$  à  $SS_1$



$$(P_{r1}) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(\bar{\bar{C}}_1) + rang(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - \bar{\bar{C}}_1 Ml_{21} - Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{\bar{C}}_1 Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

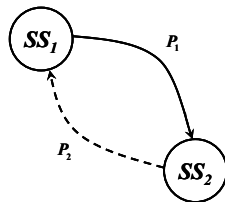
et

$$(P_{r2}) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(\bar{\bar{C}}_1) + rang(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{12} - \bar{\bar{C}}_2 Ml_{12} - Ml_{12} \bar{\bar{C}}_1 + \bar{\bar{C}}_2 Ml_{12} \bar{\bar{C}}_1 \equiv 0 \end{cases}$$

## Remarque 2

Deux chemins possibles peuvent être parcourus pour la conception du réseau :

- de  $SS_1$  à  $SS_2$
- de  $SS_2$  à  $SS_1$



$$(Pr_1) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(\bar{\bar{C}}_1) + rang(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{21} - \bar{\bar{C}}_1 Ml_{21} - Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{\bar{C}}_1 Ml_{21} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

et

$$(Pr_2) \begin{cases} \text{Minimiser } rang(\bar{\bar{C}}_1) + rang(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } Ml_{12} - \bar{\bar{C}}_2 Ml_{12} - Ml_{12} \bar{\bar{C}}_1 + \bar{\bar{C}}_2 Ml_{12} \bar{\bar{C}}_1 \equiv 0 \end{cases}$$

# Conception du réseau minimal : $\bar{C}_j$ et $\bar{\bar{C}}_j$

$\bar{C}_j$  sont obtenues en résolvant le problème d'optimisation :

$$(Pr_j) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{C}_j) \\ \text{Sous la contrainte } \text{rang}(OM_j) = n_j \end{cases}$$

Ce test est facile à réaliser pour chaque sous-système individuellement.

$\bar{\bar{C}}_j$  sont obtenues en résolvant un des deux problèmes d'optimisation :

$$(Pr_1) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{21} - \bar{\bar{C}}_1 M_{21} - M_{21} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{\bar{C}}_1 M_{21} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$(Pr_2) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{12} - \bar{\bar{C}}_2 M_{12} - M_{12} \bar{\bar{C}}_1 + \bar{\bar{C}}_2 M_{12} \bar{\bar{C}}_1 \equiv 0 \end{cases}$$

Finalement, la matrice  $C_j$  sera l'union de  $\bar{C}_j$  et  $\bar{\bar{C}}_j$  :  $C_j = \bar{C}_j \cup \bar{\bar{C}}_j$ .



# Conception du réseau minimal : $\bar{C}_j$ et $\bar{\bar{C}}_j$

$\bar{C}_j$  sont obtenues en résolvant le problème d'optimisation :

$$(Pr_j) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{C}_j) \\ \text{Sous la contrainte } \text{rang}(OM_j) = n_j \end{cases}$$

Ce test est facile à réaliser pour chaque sous-système individuellement.

$\bar{\bar{C}}_j$  sont obtenues en résolvant un des deux problèmes d'optimisation :

$$(Pr_1) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{12} - \bar{\bar{C}}_1 M_{12} - M_{12} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{\bar{C}}_1 M_{12} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$(Pr_2) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{12} - \bar{\bar{C}}_2 M_{12} - M_{12} \bar{\bar{C}}_1 + \bar{\bar{C}}_2 M_{12} \bar{\bar{C}}_1 \equiv 0 \end{cases}$$

Finalement, la matrice  $C_j$  sera l'union de  $\bar{C}_j$  et  $\bar{\bar{C}}_j$  :  $C_j = \bar{C}_j \cup \bar{\bar{C}}_j$ .



# Conception du réseau minimal : $\bar{C}_j$ et $\bar{\bar{C}}_j$

$\bar{C}_j$  sont obtenues en résolvant le problème d'optimisation :

$$(Pr_j) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{C}_j) \\ \text{Sous la contrainte } \text{rang}(OM_j) = n_j \end{cases}$$

Ce test est facile à réaliser pour chaque sous-système individuellement.

$\bar{\bar{C}}_j$  sont obtenues en résolvant un des deux problèmes d'optimisation :

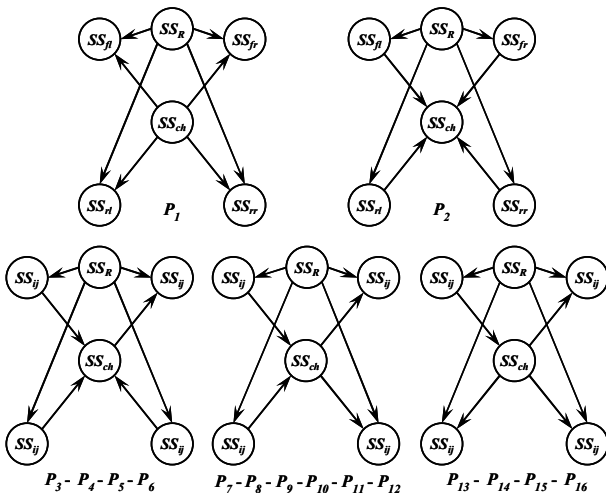
$$(Pr_1) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{121} - \bar{\bar{C}}_1 M_{121} - M_{121} \bar{\bar{C}}_2 + \bar{\bar{C}}_1 M_{121} \bar{\bar{C}}_2 \equiv 0 \end{cases}$$

$$(Pr_2) \begin{cases} \text{Minimiser } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_1) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_2) \\ \text{Sous les contraintes } M_{112} - \bar{\bar{C}}_2 M_{112} - M_{112} \bar{\bar{C}}_1 + \bar{\bar{C}}_2 M_{112} \bar{\bar{C}}_1 \equiv 0 \end{cases}$$

Finalement, la matrice  $C_j$  sera l'union de  $\bar{C}_j$  et  $\bar{\bar{C}}_j$  :  $C_j = \bar{C}_j \cup \bar{\bar{C}}_j$ .



# Application à la suspension active : les chemins





# Application à la suspension active : problème $Pr_1$

Le problème d'optimisation associé au chemin  $P_1$  :

$$Pr_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{fr}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{fl}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{rr}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{rl}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{ch}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_R) \\ \text{Sous les contraintes} \\ Ml_{frch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{frch} - Ml_{frch} \bar{\bar{C}}_{fr} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{frch} \bar{\bar{C}}_{fr} \equiv 0 \\ Ml_{flch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{flch} - Ml_{flch} \bar{\bar{C}}_{fl} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{flch} \bar{\bar{C}}_{fl} \equiv 0 \\ Ml_{rrch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rrch} - Ml_{rrch} \bar{\bar{C}}_{rr} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rrch} \bar{\bar{C}}_{rr} \equiv 0 \\ Ml_{rlch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rlch} - Ml_{rlch} \bar{\bar{C}}_{rl} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rlch} \bar{\bar{C}}_{rl} \equiv 0 \\ Ml_{Rfr} - \bar{\bar{C}}_{fr} Ml_{Rfr} - Ml_{Rfr} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{fr} Ml_{Rfr} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rfl} - \bar{\bar{C}}_{fl} Ml_{Rfl} - Ml_{Rfl} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{fl} Ml_{Rfl} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rrr} - \bar{\bar{C}}_{rr} Ml_{Rrr} - Ml_{Rrr} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{rr} Ml_{Rrr} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rrl} - \bar{\bar{C}}_{rl} Ml_{Rrl} - Ml_{Rrl} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{rl} Ml_{Rrl} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ \delta_R^1 = 0; \delta_R^2 = 0; \delta_R^3 = 0; \delta_R^4 = 0 \end{array} \right.$$

Le nombre des capteurs pour chaque chemin :

Chemin	$P_1$	$P_2$	$P_3 - P_6$	$P_7 - P_{12}$	$P_{13} - P_{16}$
Nombre de capteurs	7	8	9	9	8

# Application à la suspension active : problème $Pr_1$

Le problème d'optimisation associé au chemin  $P_1$  :

$$Pr_1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{fr}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{fl}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{rr}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{rl}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_{ch}) + \text{rang}(\bar{\bar{C}}_R) \\ \text{Sous les contraintes} \\ Ml_{frch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{frch} - Ml_{frch} \bar{\bar{C}}_{fr} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{frch} \bar{\bar{C}}_{fr} \equiv 0 \\ Ml_{flch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{flch} - Ml_{flch} \bar{\bar{C}}_{fl} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{flch} \bar{\bar{C}}_{fl} \equiv 0 \\ Ml_{rrch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rrch} - Ml_{rrch} \bar{\bar{C}}_{rr} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rrch} \bar{\bar{C}}_{rr} \equiv 0 \\ Ml_{rlch} - \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rlch} - Ml_{rlch} \bar{\bar{C}}_{rl} + \bar{\bar{C}}_{ch} Ml_{rlch} \bar{\bar{C}}_{rl} \equiv 0 \\ Ml_{Rfr} - \bar{\bar{C}}_{fr} Ml_{Rfr} - Ml_{Rfr} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{fr} Ml_{Rfr} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rfl} - \bar{\bar{C}}_{fl} Ml_{Rfl} - Ml_{Rfl} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{fl} Ml_{Rfl} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rrr} - \bar{\bar{C}}_{rr} Ml_{Rrr} - Ml_{Rrr} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{rr} Ml_{Rrr} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ Ml_{Rrl} - \bar{\bar{C}}_{rl} Ml_{Rrl} - Ml_{Rrl} \bar{\bar{C}}_R + \bar{\bar{C}}_{rl} Ml_{Rrl} \bar{\bar{C}}_R \equiv 0 \\ \delta_R^1 = 0; \delta_R^2 = 0; \delta_R^3 = 0; \delta_R^4 = 0 \end{array} \right.$$

Le nombre des capteurs pour chaque chemin :

Chemin	$P_1$	$P_2$	$P_3 - P_6$	$P_7 - P_{12}$	$P_{13} - P_{16}$
Nombre de capteurs	7	8	9	9	8

# Application à la suspension active : reseau minimal

## Hypothèse

- **15 capteurs** sont utilisés

## Reseau minimal

- **7 capteurs** sont suffisants pour verifier l'observabilite du systeme

Les matrices des sorties sont :

$$C_{ch} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_{\vartheta} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \text{ avec } \vartheta = \{fr, fl, rr, rl\}$$

Ces capteurs mesurent :

- les vitesses verticales des masses non suspendues
- la vitesse verticale, les vitesses angulaires de tangage et de roulis du châssis.



# Motivation et objectif

## Motivation :

Le réseau minimal n'est pas tolérant vis-à-vis de la perte des capteurs.

## Objectif :

Utiliser de capteurs additionnels pour augmenter la tolérance du réseau.

Approche constituée de deux étapes :

- 1 Étude de l'effet des pertes des capteurs sur l'observabilité des sous-systèmes et leur propagation
- 2 Détermination des capteurs additionnels à utiliser



# Motivation et objectif

## Motivation :

Le réseau minimal n'est pas tolérant vis-à-vis de la perte des capteurs.

## Objectif :

Utiliser de capteurs additionnels pour augmenter la tolérance du réseau.

Approche constituée de deux étapes :

- 1 Étude de l'effet des pertes des capteurs sur l'observabilité des sous-systèmes et leur propagation
- 2 Détermination des capteurs additionnels à utiliser



# Motivation et objectif

## Motivation :

Le réseau minimal n'est pas tolérant vis-à-vis de la perte des capteurs.

## Objectif :

Utiliser de capteurs additionnels pour augmenter la tolérance du réseau.

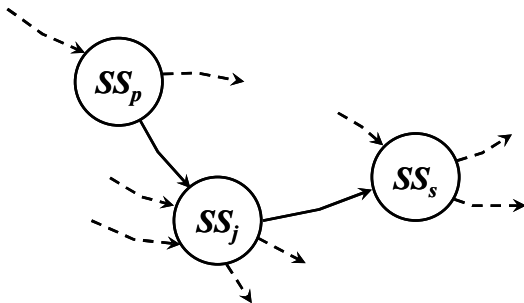
Approche constituée de deux étapes :

- 1 Étude de l'effet des pertes des capteurs sur l'observabilité des sous-systèmes et leur propagation
- 2 Détermination des capteurs additionnels à utiliser



# Système quelconque (S)

Considérons un système quelconque (S) :



( $SS_j$ ) a un certain nombre de prédécesseurs et de successeurs.



# Première étape : effet de la perte des capteurs

Pour  $(SS_j)$ , ses prédécesseurs et ses successeurs, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rang}(OM_j) = n_j, \\ \text{rang}(OM_s) = n_s, \quad s = s_1, \dots, s_{\text{Succ}_j} \\ \text{rang}(OM_p) = n_p, \quad p = p_1, \dots, p_{\text{Pred}_j} \\ MI_{jp} - \bar{C}_p MI_{jp} - MI_{jp} \bar{C}_j + \bar{C}_p MI_{jp} \bar{C}_j \equiv 0 \\ MI_{sj} - \bar{C}_j MI_{sj} - MI_{sj} \bar{C}_s + \bar{C}_j MI_{sj} \bar{C}_s \equiv 0 \end{array} \right.$$

Perte d'un des capteurs de  $(SS_j)$  :

Plusieurs tests doivent être effectués pour  $(SS_j)$ , ses prédécesseurs et ses successeurs, afin de déterminer l'effet du défaut sur le système.





# Première étape : effet de la perte des capteurs

Pour  $(SS_j)$ , ses prédécesseurs et ses successeurs, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rang}(OM_j) = n_j, \\ \text{rang}(OM_s) = n_s, \quad s = s_1, \dots, s_{\text{succ}_j} \\ \text{rang}(OM_p) = n_p, \quad p = p_1, \dots, p_{\text{pred}_j} \\ MI_{jp} - \bar{C}_p MI_{jp} - MI_{jp} \bar{C}_j + \bar{C}_p MI_{jp} \bar{C}_j \equiv 0 \\ MI_{sj} - \bar{C}_j MI_{sj} - MI_{sj} \bar{C}_s + \bar{C}_j MI_{sj} \bar{C}_s \equiv 0 \end{array} \right.$$

## Perte d'un des capteurs de $(SS_j)$ :

Plusieurs tests doivent être effectués pour  $(SS_j)$ , ses prédécesseurs et ses successeurs, afin de déterminer l'effet du défaut sur le système.



## Deuxième étape : ajout des capteurs additionnels

### Idée :

Si la perte du capteur  $\delta_i^k$  conduit à la perte d'observabilité de  $SS_i$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & rang(\bar{C}_i) \\ \text{Sous les contraintes} & rang(OM_i) = n_i \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

Si la perte de  $\delta_i^k$  conduit à  $MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \neq 0$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & rang(\bar{C}_i) + rang(\bar{C}_j) \\ \text{Sous les contraintes} & MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \equiv 0 \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

La contrainte additionnelle  $\delta_i^k = 0$  impose de ne pas utiliser le capteur  $\delta_i^k$ , de telle sorte que la solution obtenue soit insensible à la perte de  $\delta_i^k$ .

## Deuxième étape : ajout des capteurs additionnels

### Idée :

Si la perte du capteur  $\delta_i^k$  conduit à la perte d'observabilité de  $SS_i$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \text{rang}(\bar{C}_i) \\ \text{Sous les contraintes} & \text{rang}(OM_i) = n_i \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

Si la perte de  $\delta_i^k$  conduit à  $MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \neq 0$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & \text{rang}(\bar{C}_i) + \text{rang}(\bar{C}_j) \\ \text{Sous les contraintes} & MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \equiv 0 \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

La contrainte additionnelle  $\delta_i^k = 0$  impose de ne pas utiliser le capteur  $\delta_i^k$ , de telle sorte que la solution obtenue soit insensible à la perte de  $\delta_i^k$ .

## Deuxième étape : ajout des capteurs additionnels

### Idée :

Si la perte du capteur  $\delta_i^k$  conduit à la perte d'observabilité de  $SS_i$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & rang(\bar{C}_i) \\ \text{Sous les contraintes} & rang(OM_i) = n_i \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

Si la perte de  $\delta_i^k$  conduit à  $MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \neq 0$  :

$$Pr \left\{ \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & rang(\bar{C}_i) + rang(\bar{C}_j) \\ \text{Sous les contraintes} & MI_{ij} - \bar{C}_j MI_{ij} - MI_{ij} \bar{C}_i + \bar{C}_j MI_{ij} \bar{C}_i \equiv 0 \\ & \delta_i^k = 0 \end{array} \right.$$

La contrainte additionnelle  $\delta_i^k = 0$  impose de ne pas utiliser le capteur  $\delta_i^k$ , de telle sorte que la solution obtenue soit insensible à la perte de  $\delta_i^k$ .

# Application à la suspension active : effet des défauts

## Pour le réseau de capteurs minimal :

L'effet des défauts des capteurs est donné dans le tableau suivant :

	$\delta_{ch}^2$	$\delta_{ch}^4$	$\delta_{ch}^6$	$\delta_{fr}^2$	$\delta_{fl}^2$	$\delta_{rr}^2$	$\delta_{rl}^2$
$SS_{ch}$	0	0	0	1	1	1	1
$SS_{fr}$	0	0	0	0	1	1	1
$SS_{fl}$	0	0	0	1	0	1	1
$SS_{rr}$	0	0	0	1	1	0	1
$SS_{rl}$	0	0	0	1	1	1	0

avec :

0 : perte d'observabilité

1 : préservation d'observabilité



# Application à la suspension active : réseau tolérant

**20 capteurs** doivent être utilisés. Deux ensembles sont possibles :

$$\hat{J}^1 = \{\delta_{ch}^2, \delta_{ch}^3, \delta_{ch}^4, \delta_{ch}^6, \delta_{fr}^1, \delta_{fr}^2, \delta_{fr}^{2,2}, \delta_{fr}^3, \delta_{fl}^1, \delta_{fl}^2, \delta_{fl}^{2,2}, \delta_{fl}^3, \delta_{rr}^1, \delta_{rr}^2, \delta_{rr}^{2,2}, \delta_{rr}^3, \delta_{rl}^1, \delta_{rl}^2, \delta_{rl}^{2,2}, \delta_{rl}^3\}$$

ou

$$\hat{J}^2 = \{\delta_{ch}^2, \delta_{ch}^4, \delta_{ch}^5, \delta_{ch}^6, \delta_{fr}^1, \delta_{fr}^2, \delta_{fr}^{2,2}, \delta_{fr}^3, \delta_{fl}^1, \delta_{fl}^2, \delta_{fl}^{2,2}, \delta_{fl}^3, \delta_{rr}^1, \delta_{rr}^2, \delta_{rr}^{2,2}, \delta_{rr}^3, \delta_{rl}^1, \delta_{rl}^2, \delta_{rl}^{2,2}, \delta_{rl}^3\}$$

Les matrices de sorties correspondantes sont les suivantes :

$$\hat{C}_{ch}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \hat{C}_{\vartheta}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\vartheta = \{fr, fl, rr, rl\})$$

$$\hat{C}_{ch}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \hat{C}_{\vartheta}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\vartheta = \{fr, fl, rr, rl\})$$



# Conclusion et perspectives

## Conclusion :

- 1 Instrumentation des systèmes complexes :
  - Réseau de capteurs minimal (en nombre des capteurs)
  - Réseau de capteurs tolérant aux défauts
- 2 Facilité de déterminer le réseau à coût minimal à partir des problèmes d'optimisation
- 3 Possibilité de considérer le système complet ou de sous-systèmes particuliers

## Perspectives :

- Application à un véhicule prototype
- Concaténation des deux problèmes d'optimisation en un seul problème
- Extension aux systèmes décrits par des équations dynamiques et statiques



# Conclusion et perspectives

## Conclusion :

- 1 Instrumentation des systèmes complexes :
  - Réseau de capteurs minimal (en nombre des capteurs)
  - Réseau de capteurs tolérant aux défauts
- 2 Facilité de déterminer le réseau à coût minimal à partir des problèmes d'optimisation
- 3 Possibilité de considérer le système complet ou de sous-systèmes particuliers

## Perspectives :

- Application à un véhicule prototype
- Concaténation des deux problèmes d'optimisation en un seul problème
- Extension aux systèmes décrits par des équations dynamiques et statiques





# Merci