Processus de Markov déterministes par morceaux
Fiabilité dynamique

Christiane Cocozza-Thivent, Sophie Mercier, Michel Roussignol

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR CNRS 8050)

christiane.cocozza@univ-mlv.fr
sophie.mercier@univ-mlv.fr
michel.roussignol@univ-mlv.fr

Plan

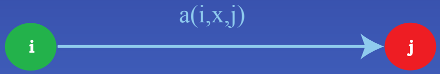
Le modèle de fiabilité dynamique

Un matériel peut se trouver dans différents états $i, j, \ldots$ appartenant à E.

Le taux de transition de l'état i vers l'état j dépend de variables "physiques" $x \in V_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$

sachant qu'à l'instant t le matériel est dans l'état i et que les variables physiques sont dans l'état x, la probabilité que le matériel passe de i à j dans l'intervalle de temps $(t, t+\Delta)$ est

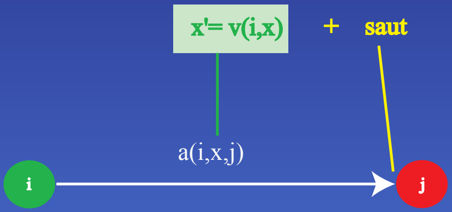
$$a(i, x, j)\,\Delta + o(\Delta)$$



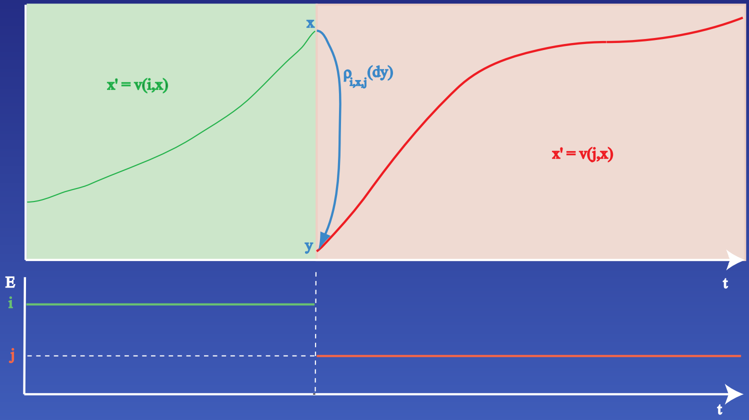
Le modèle de fiabilité dynamique

Le matériel peut se trouver dans différents états $i, j, \ldots$ appartenant à E.

Le taux de transition de l'état i vers l'état j dépend de variables "physiques" $x \in V_i \subset\in \mathbb{R}^{d_i}$ dont l'évolution dépend de l'état du matériel.



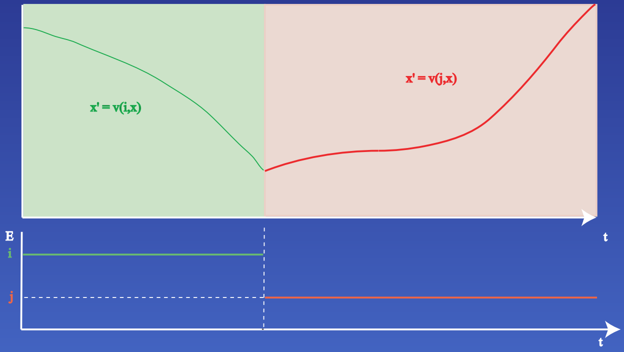
Le modèle de fiabilité dynamique



Le modèle de fiabilité dynamique

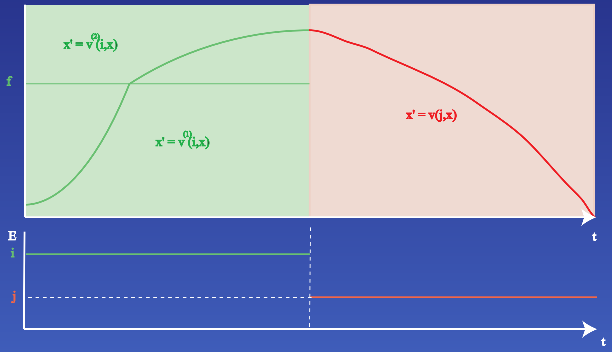
Lorsqu'il y a changement d'état du matériel, les variables physiques n'ont pas obligatoirement un saut. Lorsqu'il n'y a pas de saut :

$$\rho_{\mathrm{i,x,j}} = \delta_{\mathrm{x}} \text{ loi de Dirac en x}$$



Le modèle de fiabilité dynamique

Il peut y avoir des dicontinuités dans les coefficients du "système différentiel"



Le modèle de fiabilité dynamique

L'important est que l'évolution déterministe des variables physiques soit markovienne : le futur ne dépend que de l'état présent.

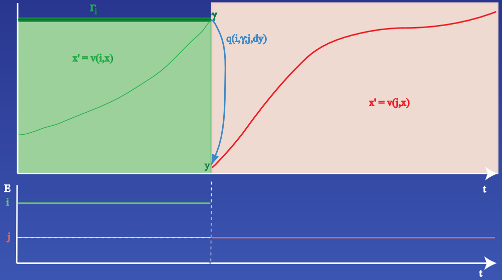
On note $g(i, x, t)$ la valeur des variables physiques à l'instant t lorsque celles-ci valent x à l'instant initial et que le matériel est resté dans l'état i sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$.

On doit avoir :

$$g(i, x, t + s) = g(i, g(i, x, t), s).$$

Le modèle de fiabilité dynamique

L'espace d'états $\mathrm{V_i}$ des variables physiques associé à i peut avoir une frontière Γ_{i}.



La transition se fait instantanément lorsque les variables physiques atteignent le point $\gamma \in \Gamma_i$, et le nouvel état (j, y) est choisi avec probabilité $q(i, \gamma; j, dy)$.

Le modèle de fiabilité dynamique

On note

- I_t l'état du matériel à l'instant t,
- X_t la valeur des variables physiques à l'instant t.

Le processus (I_t, X_t) est un processus de Markov . . .
. . . à valeurs dans un espace qui n'est ni fini ni dénombrable, d'où d'importantes difficultés théoriques et techniques.

Mots clés :

- processus de Markov déterministes par morceaux, PDMP *(Piecewise Deterministic Markov Process)*
- méthodes des variables complémentaires
- processus hybrides

Un composant avec réparations parfaites

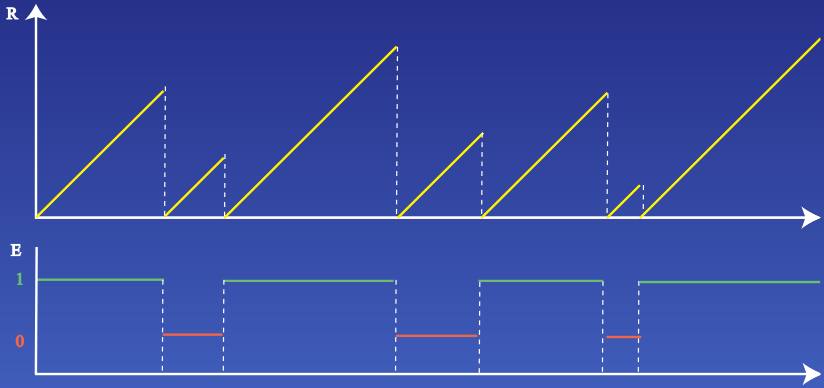
- Le composant a pour taux de défaillance $\lambda(t)$ et pour taux de réparation $\mu(t)$.

$$\mathbb{P}(\textit{une défaillance dans } (t, t{+}\Delta) \,/\, \textit{marche depuis une durée } t)$$
$$= \lambda(t)\,\Delta + o(\Delta),$$

$$\mathbb{P}(\textit{réparation terminée dans } (t, t{+}\Delta) \,/\, \textit{panne depuis une durée } t)$$
$$= \mu(t)\,\Delta + o(\Delta).$$

- Une variable physique x : la durée dans l'état courant.

Un composant avec réparations parfaites

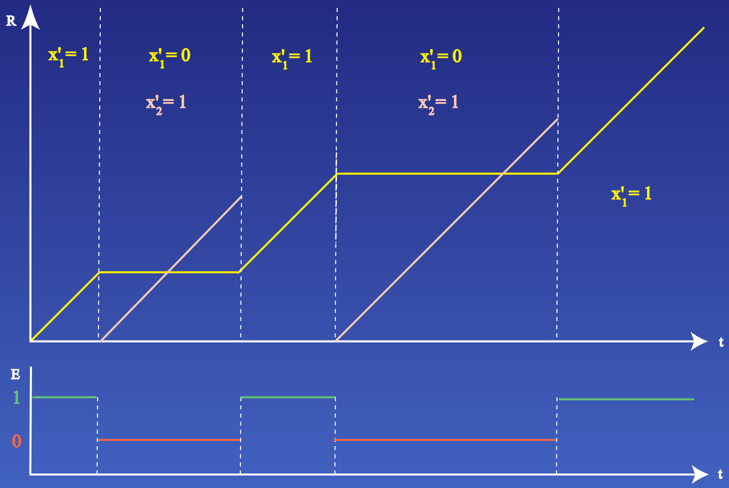


Un composant avec réparations minimales

- Le composant a pour taux de défaillance $\lambda(t)$ et pour taux de réparation $\mu(t)$.
- Variables physiques :
  - x_1 : âge du composant,
  - dans l'état de panne, une deuxième variable

  x_2 : durée écoulée depuis le début de la réparation en cours.

Un composant avec réparations minimales



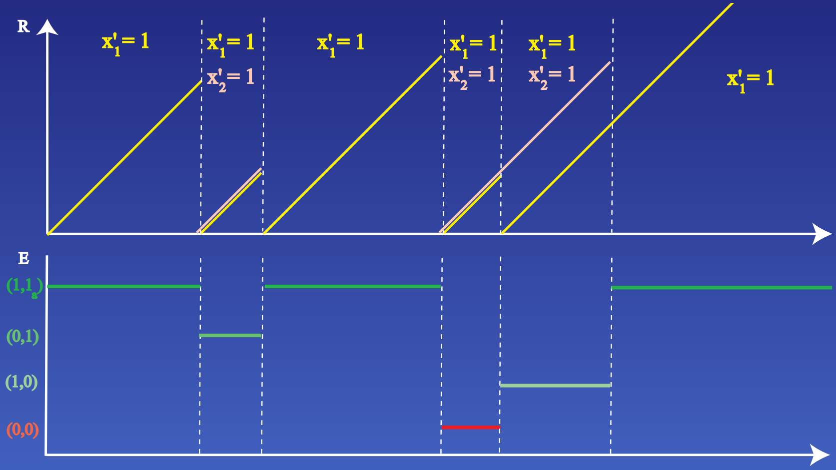
Deux composants en redondance passive

- En régime normal, le composant principal est en marche et le composant de secours est à l'arrêt.
- Lorsque le composant principal tombe en panne, on essaie de démarrer instantanément le composant de secours, mais il y a une probabilité p pour que celui-ci refuse de démarrer lors de la sollicitation.
- Lorsque le composant principal est réparé, c'est celui-ci qui fonctionne et le composant de secours est mis à l'arrêt et remis à neuf instantanément.
- Pendant qu'il est à l'arrêt, le composant de secours ne vieillit pas. Après une réparation, un composant est considéré comme neuf.

Deux composants en redondance passive

- Les taux de défaillance et de réparation dépendent a priori du temps.
- Variables physiques :
  - x_1 : âge du composant principal ou durée écoulée depuis le début de sa réparation, c'est-à-dire durée dans son état courant,
  - lorsque le composant de secours n'est pas à l'arrêt, une deuxième variable
  x_2 : âge du composant de secours ou durée écoulée depuis le début de sa réparation, c'est-à-dire durée dans son état courant.

Deux composants en redondance passive



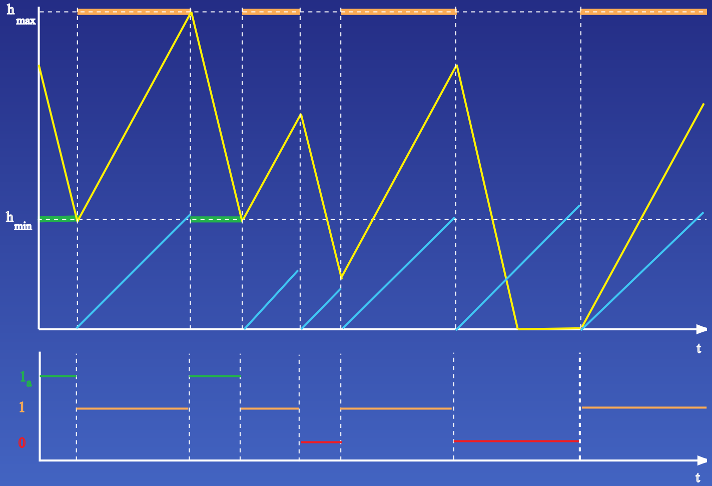
Réservoir

- Un réservoir alimente un circuit hydraulique avec un débit constant.
- Une pompe alimente le réservoir. Elle est à l'arrêt tant que le niveau de liquide dans le réservoir n'atteint pas h_{min}.
- Lorsque le niveau atteint h_{min}, la pompe est mise en marche et elle est arrêtée lorsque le niveau atteint h_{max}.
- Lorsque la pompe est en marche, elle peut tomber en panne.
- Après un arrêt ou une réparation, la pompe est considérée comme neuve.

Réservoir

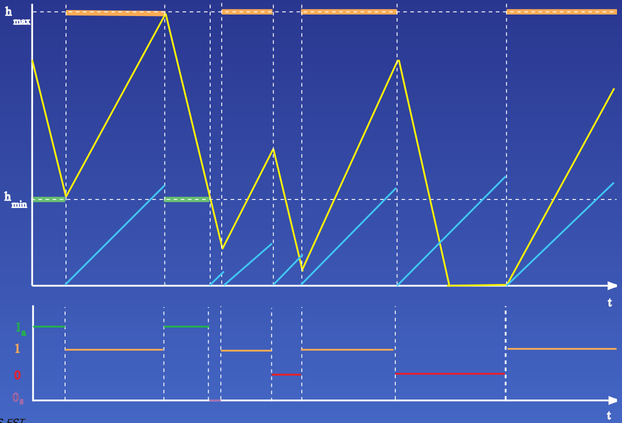
- Les taux de défaillance et de réparation dépendent a priori du temps.
- Variables physiques :
  - x_1 : hauteur de liquide dans le réservoir,
  - lorsque la pompe n'est pas à l'arrêt, une deuxième variable x_2 : âge de la pompe ou durée écoulée depuis le début de la réparation en cours (durée dans l'état courant).

Réservoir



Réservoir

Lorsque l'on veut démarrer la pompe, il peut y avoir refus de démarrage à la sollicitation : état 0_s.



Simulation

Notons $g(i, x, t)$ la valeur des variables physiques lorsque le matériel est dans l'état i depuis une durée t, $g(i, x, 0) = x$,

et $t^*_{i,x}$ le temps d'atteinte de la frontière Γ_i :

$$t^*_{i,x} = \inf\{t : g(i, x, t) \in \Gamma_i\}.$$

Posons

$$b(i, x) = \sum_{j \in E} a(i, x, j).$$

Simulation

Partant de (i, x),

- on simule l'instant T_1 du premier saut

$$T_1 = \min(S, t^*_{i,x}),$$
$$\mathbb{P}(S > t) = \exp\left(-\int_0^t b(i, g(i, x, s))\, ds\right).$$

Le taux de défaillance correspondant à S est donc

$$\lambda(s) = b(i, g(i, x, s)).$$

On peut simuler S par la méthode de la fonction de répartition inverse.

- pour $0 \leq t < T_1 : X_t = g(i, x, t)$.

Simulation

- on simule l'endroit (I_{T_1}, X_{T_1}) où le processus saute sachant qu'il saute à l'instant t :

- si $t < t^*_{i,x}$

$$\mathbb{P}_{i,x}(I_{T_1} = j, \;/\; T_1 = t) = \frac{a(i, g(i,x,t), j)}{\sum_k a(i, g(i,x,t), k)} = \frac{a(i, g(i,x,t), j)}{b(i, g(i,x,t))},$$

$$\mathbb{P}_{i,x}(X_{T_1} \in (y, y+dy) \;/\; T_1 = t, I_{T_1} = j) = \rho_{i,g(i,x,t),j}(dy),$$

- si $t = t^*_{i,x}$ et $g(i, x, t^*_{i,x}) = \gamma$, on choisit (I_{T_1}, X_{T_1}) en utilisant la loi $q(i, \gamma; \cdot, \cdot)$:

$$\mathbb{P}_{i,x}(I_{T_1} = j, X_{T_1} \in (y, y+dy) \;/\; T_1 = t^*_{i,x}) = q(i, \gamma; j, dy).$$

Ce qu'on veut calculer

On veut calculer :

- la probabilité que le matériel soit dans l'état i à l'instant t : $\mathbb{P}(I_t = i)$,
- la probabilité que, à l'instant t, le matériel soit dans l'état i et les variables physiques dans l'ensemble A : $\mathbb{P}(I_t = i, X_t \in A)$,
- le nombre moyen de fois où le matériel est passé de l'état i à l'état j pendant l'intervalle de temps $[0, t]$: $\mathbb{E}(N_{i,j}(t))$.

Ce qu'on veut calculer

On démontre que :

- $\mathbb{P}(I_t = i) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(I_t = i, X_t \in (x, x+dx))$: formule des probabilités marginales,
- $\mathbb{P}(I_t = i, X_t \in A) = \int_A \mathbb{P}(I_t = i, X_t \in (x, x+dx))$: définition de la loi de (I_t, X_t),
- $\mathbb{E}(\overset{\circ}{N}_{i,j}(t)) = \int_0^t \int_0^{+\infty} a(i,x,j)\, \mathbb{P}(I_s = i, X_s \in (x, x+dx))\, ds$ résultat issu de la théorie générale des processus stochastiques.

Il faut donc calculer les

$$\pi_t(i, dx) = \mathbb{P}(I_t = i, X_t \in (x, x+dx)).$$

Ce qu'on veut calculer

On veut aussi les quantités asymptotiques :

- $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(I_t = i) = \int_0^{+\infty} \pi(i, dx)$
- $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(I_t = i, X_t \in A) = \int_A \pi(i, dx)$
- $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_{i,j}(t))}{t} = \int_0^{+\infty} a(i, x, j)\, \pi(i, dx)$

Il faut donc également calculer la loi stationnaire

$$\pi(i, dx) = \lim_{t\to\infty} \pi_t(i, dx).$$

Ce qu'on veut calculer

On veut aussi calculer des indicateurs de sensibilité des quantités d'intérêt par rapport aux différents paramètres du modèle.

Outils mathématiques

Pour de “bonnes fonctions” f, et si les variables physiques évoluent suivant des “systèmes d'équations différentielles”, on pose

$$\begin{aligned} Lf(i,x) &= \sum_{r=1}^{d_i} \frac{\partial f}{\partial x_r}(i,x)\,\mathbf{v}_r(i,x) \\ &\quad + \sum_{j\in E} \int_{V_j} \Big(f(j,y) - f(i,x) \Big)\, a(i,x,j)\, \rho_{i,x,j}(dy) \end{aligned}$$

Outils mathématiques

Si T est un instant (éventuellement aléatoire) qui n'anticipe pas sur le futur, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(I_T, X_T)) &= \mathbb{E}(f(I_0, X_0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^T Lf(I_s, X_s)\, ds\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\sum_{k:\, T_k \leq T} 1_\Gamma(I_{T_k-}, X_{T_k-}) \right.\\
&\left. \times \sum_j \int_{V_j} (f(j, y) - f(I_{T_k-}, X_{T_k-}))\; q(I_{T_k-}, X_{T_k-}; j, dy)\right).
\end{aligned}$$

Outils mathématiques

S'il n'y a pas de frontière ou si f vérifie : pour tout $(i, \gamma) \in \Gamma$

$$f(i,\gamma) = \sum_j \int_{V_j} f(j,y)\, q(i,\gamma; j, dy)$$

alors

$$\mathbb{E}(f(I_T, X_T)) = \mathbb{E}(f(I_0, X_0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^T Lf(I_s, X_s)\, ds\right)$$

En prenant pour T les instants de saut qui ne sont pas dûs à l'atteinte d'une frontière, on en déduit la formule donnant $\mathbb{E}(\overset{\circ}{N}_{i,j}(t))$.

Outils mathématiques

En prenant $T = t$, on en déduit que lorsqu'il n'y a pas de frontière, les $\pi_t(i, dx) = \mathbb{P}(I_t = i, X_t \in (x, x + dx))$ sont "solutions d'un système d'E.D.P." couplées par les seconds membres.

Par exemple si π_0 et les $\rho_{i,x,j}$ ont des densités $\bar{\pi}_0$ et $\bar{\rho}$ suffisamment régulières, il en est de même pour les $\pi_t(i, \cdot)$:

$$\pi_t(i, dx) = \bar{\pi}(i, x, t)\, dx,$$

et pour tout i :

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t}(i, x, t) + div_x(\bar{\pi}\, \mathbf{v})(i, x, t)$$
$$= \sum_j \int a(j, y, x)\, \bar{\rho}_{j,y,i}(x)\, \bar{\pi}(j, y, t)\, dy - \bar{\pi}(i, x, t)\, b(i, x).$$

Calculs numériques par discrétisations

Pour calculer π_t on discrétise l'espace dans lequel X_t évolue.

Deux approches :

- discrétisation des équations aux dérivées partielles (discrétisation de l'espace et du temps)
  - méthodes explicites : plus faciles à mettre en oeuvre mais problèmes si la discrétisation en temps n'est pas assez fine,
  - méthodes implicites : pas de comportement aberrant si la discrétisation n'est pas assez fine, bons résultats en asymptotique mais lissage des résultats et plus de calculs,
- approximation du processus stochastique
  - par un processus markovien de sauts, puis calcul de la loi de celui-ci par la méthode que l'on veut ("Euler implicite" redonne une méthode de "volumes finis implicites"),
  - par une chaine de Markov (comme dans les méthodes de simulation "cell to cell").

Quantité d'intérêt pour le calcul de facteurs d'importance

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \mathbb{E}_{\pi_0}\left(\int_0^t h(I_s, X_s)\, ds\right) \\
&= \sum_{i \in E} \int_V \int_0^t h(i, x)\ \pi_s\,(i, dx)\ \ ds \\
&= \int_0^t \pi_s h\ ds
\end{aligned}
$$

où:

- h est une fonction mesurable bornée,
- $\pi_0\,(i, dx)$ est la loi initiale du processus,
- $\pi_s\,(i, dx)$ est la loi de (I_s, X_s).

Qu'est-ce qu'un facteur d'importance ?

Supposons que les paramètres définissant le processus et la fonction h dépendent d'un paramètre p, où $p \in O \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^k$.

Nous souhaitons calculer :

$$IF_p(t) = \frac{p}{R^{(p)}(t)} \frac{\partial R^{(p)}}{\partial p}(t)$$

qui est un *indicateur de sensibilité*.

Différentiabilité de la quantité d'intérêt

Théorème : sous des hypothèses de régularité des coefficients du processus et de la fonction $h^{(p)}$, la fonction $p \longmapsto R^{(p)}(t)$ est différentiable par rapport à p et il existe un opérateur $\frac{\partial \pi_u^{(p)}}{\partial p}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p}\left(R^{(p)}(t)\right) &= \int_0^t \left\langle \frac{\partial \pi_u^{(p)}}{\partial p}, h^{(p)} \right\rangle du \\ &+ \int_0^t \sum_{i \in E} \int_V \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p}(i,x)\, \pi_u^{(p)}(i,dx)\, du \end{aligned}$$

Problème : comment calculer $\left\langle \frac{\partial \pi_u^{(p)}}{\partial p}, h^{(p)} \right\rangle$?

Fonction d'importance

Définition : nous disons qu'une fonction $\varphi_t^{(p)}$ est la *fonction d'importance* associée à la fonction $h^{(p)}$ et à t si :

- $\varphi_t^{(p)}$ est solution de l'équation différentielle $L^{(p)}\varphi_t^{(p)}(i,x,s) = h^{(p)}(i,x)$ pour tout $s \in [0,t[$,
- $\varphi_t^{(p)}(i,x,t) = 0$ pour tout (i,x) dans $E \times V$.

Proposition : sous des hypothèses de régularité des coefficients du processus et de la fonction $h^{(p)}$, la fonction d'importance associée à $h^{(p)}$ et t *existe*, est *unique* et admet des *régularités*.

Calcul du facteur d'importance

Théorème : sous des hypothèses de régularité des coefficients du processus et de la fonction $h^{(p)}$, nous avons :

$$\frac{\partial R^{(p)}}{\partial p}(t) = \int_0^t \pi_s^{(p)} \frac{\partial h^{(p)}}{\partial p}\, ds - \int_0^t \pi_s^{(p)} \frac{\partial L^{(p)}}{\partial p} \varphi_t^{(p)}(.,.,s)\, ds$$

avec :

- $\pi_s^{(p)}$ loi de (I_s, X_s) calculée par résolution d'une équation différentielle
- $\varphi_t^{(p)}(.,.,s)$ fonction d'importance calculée par résolution d'une équation différentielle
- $\frac{\partial h^{(p)}}{\partial p}$ et $\frac{\partial L^{(p)}}{\partial p}$ connues explicitement, elles seules dépendant de la dérivée partielle que l'on calcule

Exemple

- Une unité de production de gaz peut être en marche ou en panne en cours de réparation.
- Quand l'unité est en marche, le taux de production varie entre un taux nominal $\phi_{nom} = 7\ 500\ \text{m}^3/\text{h}$ et un taux maximal $\phi_{max} = 10\ 000\ \text{m}^3/\text{h}$.
- Quand l'unité est en panne, le taux de production vaut zéro.
- L'entreprise a pour objectif de produire du gaz au taux nominal ϕ_{nom}.
- Pour éviter que la production soit arrêtée à cause d'une panne de l'unité, un réservoir est utilisé, avec une capacité maximale de $R = 2 \times 10^6\ \text{m}^3$.

Exemple

- Quand l'unité est en panne, le service est assuré en prenant dans le réservoir la production souhaitée, tant que le niveau du réservoir n'est pas trop bas.
- Quand l'unité est en marche, le taux de production est nominal tant que le réservoir est plein.
- Quand le réservoir n'est pas plein, l'unité produit à un taux plus élevé (au taux maximal tant que le niveau dans $\mathcal{R}$ n'est pas trop élevé) et la production complémentaire est utilisée pour remplir le réservoir.
- Le taux de production de l'unité est donc une fonction de l'état de l'unité et du niveau du réservoir.

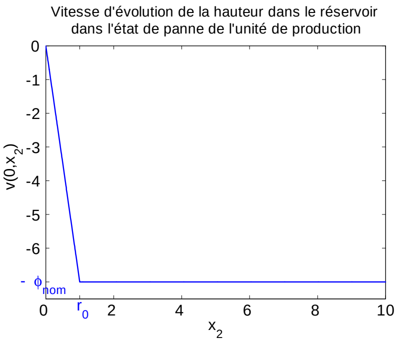
Exemple

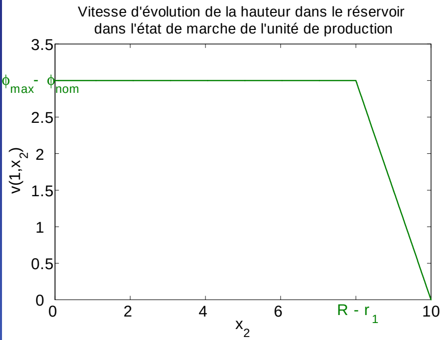
- Le temps de réparation de l'unité suit une loi lognormale de moyenne 198 h et d'écart-type 15.8 h. Le taux de hasard de cette loi est noté $a_{(t_0,\sigma)}(x)$ où t_0 et σ sont les deux paramètres habituels de la loi lognormale.
- Le temps de défaillance de l'unité suit une loi de Weibull de moyenne 930 h et d'écart-type 921 h. Le taux de hazard de cette loi vaut $a_{(\alpha,\beta)}(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$ où $\alpha = \frac{1}{10^3}$ h et $\beta = 1.01$.

Exemple

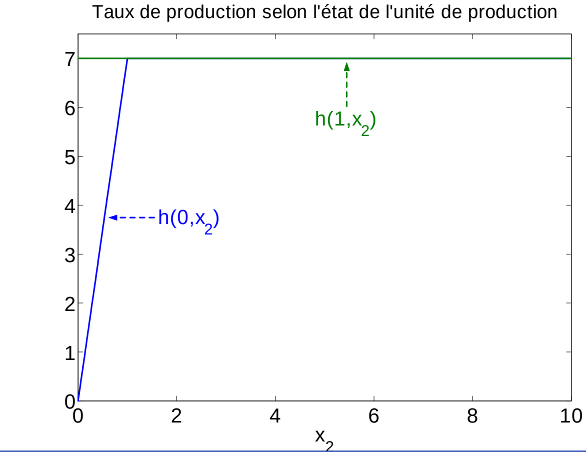
- $E = \{0, 1\}$, où 0, 1 sont respectivement les états de panne et de marche de l'unité.
- L'évolution dans le temps du système est modélisé par un PDMP $(I_t, X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $E \times \mathbb{R}^2$ avec $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$.
- La composante $X_{1,t}$ est le temps passé dans l'état discret courant.
- La composante $X_{2,t}$ est le niveau du réservoir.
- L'état initial du système est $(I_0, X_0) = (1, (0, R))$
- $a\left(1, 0, x\right) = a_{(\alpha,\beta)}\left(x_1\right)$
- $a\left(0, 1, x\right) = a_{(t_0,\sigma)}\left(x_1\right)$
- $\rho_{(1,x,0)}(dy) = \rho_{(0,x,1)}(dy) = \delta_{(0,x_2)}\left(dy\right)$

Exemple


Vitesse d'évolution de la hauteur dans le réservoir
dans l'état de panne de l'unité de production
v(0,x2)
- ϕnom
r0
x2
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
2
4
6
8
10


Vitesse d'évolution de la hauteur dans le réservoir
dans l'état de marche de l'unité de production
v(1,x2)
ϕmax - ϕnom
R - r1
x2
3.5
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
10

Exemple


Taux de production selon l'état de l'unité de production
h(1,x2)
h(0,x2)
0
1
2
3
4
5
6
7
0
2
4
6
8
10
x2

Résultats numériques

- $t = 100\ 000$ et $R(100\ 000) \simeq 99463.2$.
- e_p : erreur relative entre $R^{(p+\Delta p)}(t) - R^{(p)}(t)$ et $\Delta p \times \frac{\partial R^{(p)}}{\partial p}(t)$.
- IF_p : facteur d'importance.

p	t_0	σ	α	β
e_p	$6.53E{-5}$	$2.43E{-4}$	$1.90E{-5}$	$1.18E{-4}$
IF_p	$-7.70E{-3}$	$-5.39E{-2}$	$-5.30E{-3}$	$-3.87E{-2}$

p	ϕ_{nom}	ϕ_{max}	r_0	r_1	R
e_p	$5.56E{-5}$	$4.75E{-9}$	$3.88E{-3}$	$4.97E{-3}$	$1.62E{-3}$
IF_p	$-2.71E{-3}$	$1.75E{-4}$	$-3.15E{-5}$	$-4.43E{-6}$	$2.55E{-3}$

Temps de calcul : 19 s. Le calcul de toutes les dérivées nécessite 100 s par différences finies, ce qui montre l'efficacité de la méthode.

Conclusion

- Outil de modélisation souple et puissant.
- Actuellement nous savons faire des calculs numériques avec un nombre limité d'états discrets et une variable continue de dimension 2 ou 3.
- Progrès à faire :
  - dans l'efficacité des méthodes numériques,
  - la compréhension du comportement asymptotique.