La résolution du FPRG

(Fundamental Problem of Residual Generation)

par l'algèbre des fonctions

Denis BERDJAG, Cyrille CHRISTOPHE, Vincent COCQUEMPOT

Réunion GT S3 : Sûreté, Surveillance, Supervision
10 juin 2006

Plan de l'exposé

Problématique

Le FPRG ?

ou PFGR : Problème Fondamental de Génération de Résidus

- Détection et localisation de défaillances (FDI)
- Utilisation de modèles analytiques pour le diagnostic
    - modèle de bon fonctionnement
    - modèle de fonctionnement défaillant

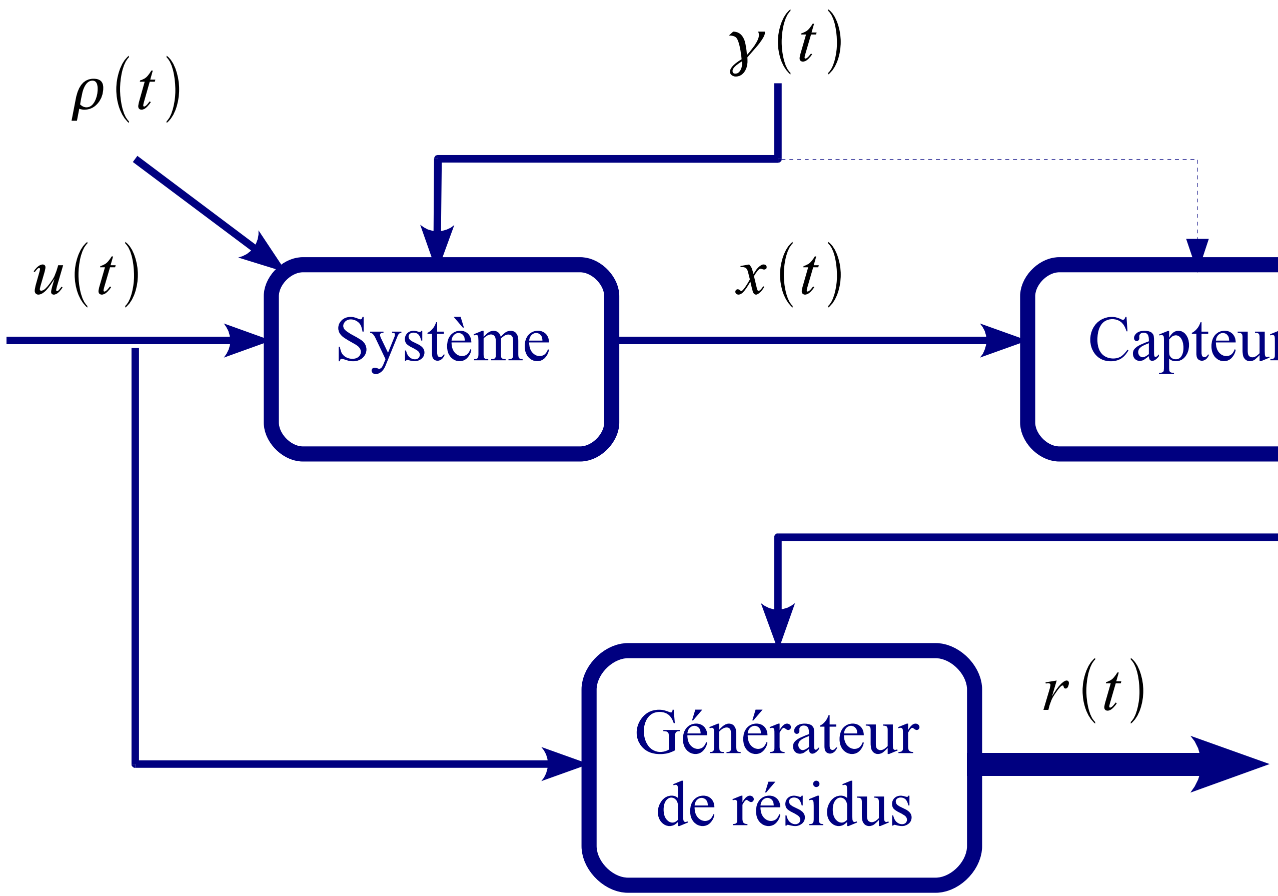
Problématique

Solution du FPRG

Construire un
Générateur de résidus

- Robuste aux pertubations
- Sensible aux défaillances
- Convergent vers zéro

Génération de résidus



FPRG

Les approches les plus répandues :

- Observateurs
- RRA (Relations de Redondance Analytique)
- Estimation de paramètres

Problème !

Solutions bien formalisées dans le cadre des modèles linéaires

Qu'en est-il du non-linéaire ?

Solutions du FPRG

Que faire en NL ?

Garder les mêmes outils ! → Linéarisation

Conséquences :

Fausses alarmes dues aux erreurs

Nécessité d'utiliser des approches NL

Solutions du FPRG

Problème :

Pas de formalisme général pour le NL

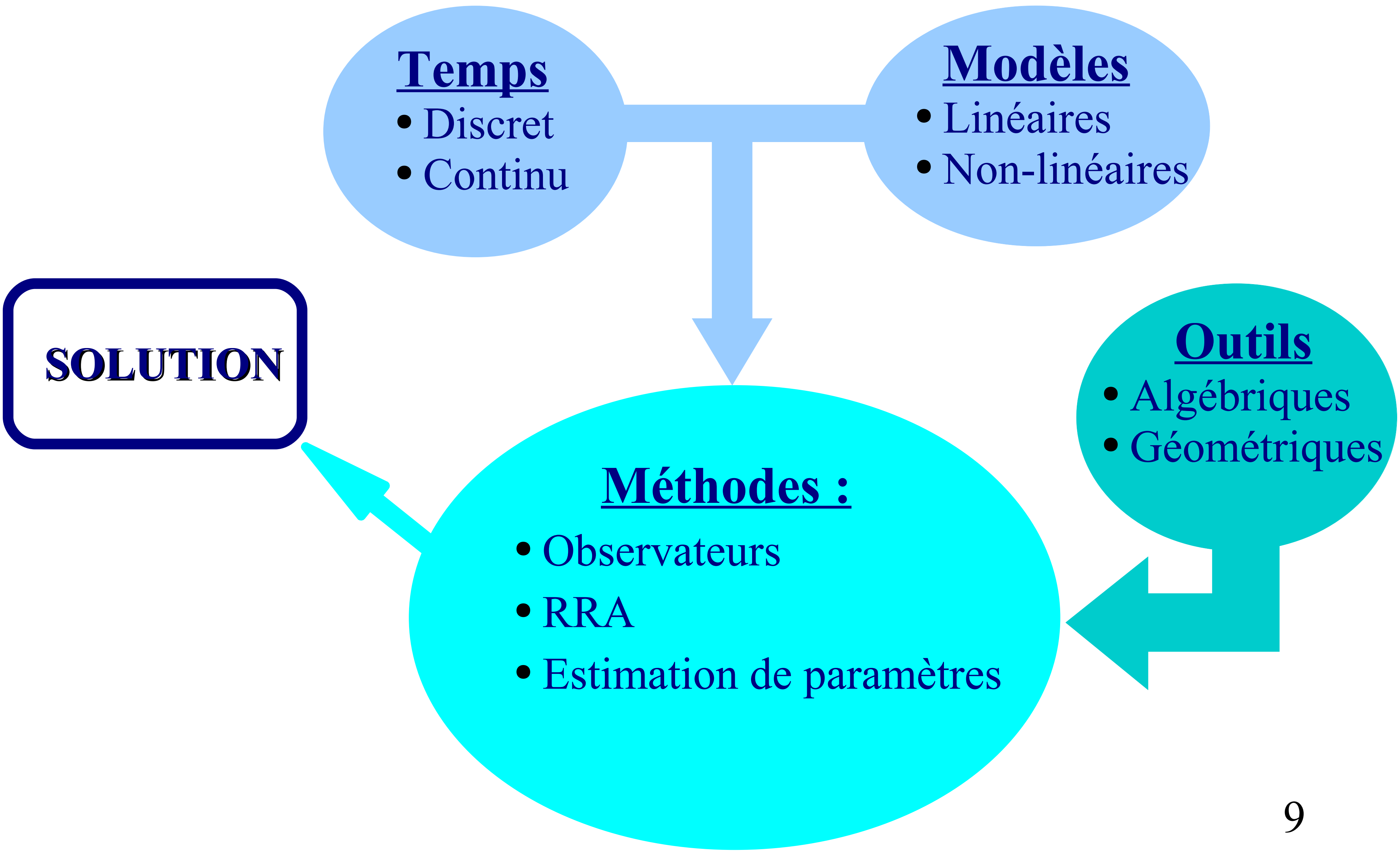
- Déscription (modèle du système)
- Méthodes

Que faire?

Définir un ensemble de conditions géométriques

→ Géométrie différentielle

Synthèse


Temps
• Discret
• Continu
Modèles
• Linéaires
• Non-linéaires
SOLUTION
Outils
• Algébriques
• Géométriques
Méthodes :
• Observateurs
• RRA
• Estimation de paramètres

Bilan

Linéaire

Les approches sont
- Satisfaisantes
- "Équivalentes"
- Reliées

→ Beaucoup de choses ont été faites

Non-linéaire
- Actuel
- Solutions spécifiques

→ Le plus important reste à faire

Générateur de résidus

Le GR doit remplir un ensemble de conditions

- Robustesse aux perturbations
- Sensibilité à la défaillance
- Le résidu doit tendre vers zéro en l'absence de défaillances

En d'autres termes :

- $\dfrac{d\,r(t)}{d\,\gamma}=0$
- $\dfrac{d\,r(t)}{d\,\rho}\neq 0$
- si $\begin{cases}\rho(t)=0\\ \gamma(t)=0\end{cases}$: $r(t)\to 0\ ,\ \forall\, u\,,\, x_{0,}\ y_0$

Décomposition du problème

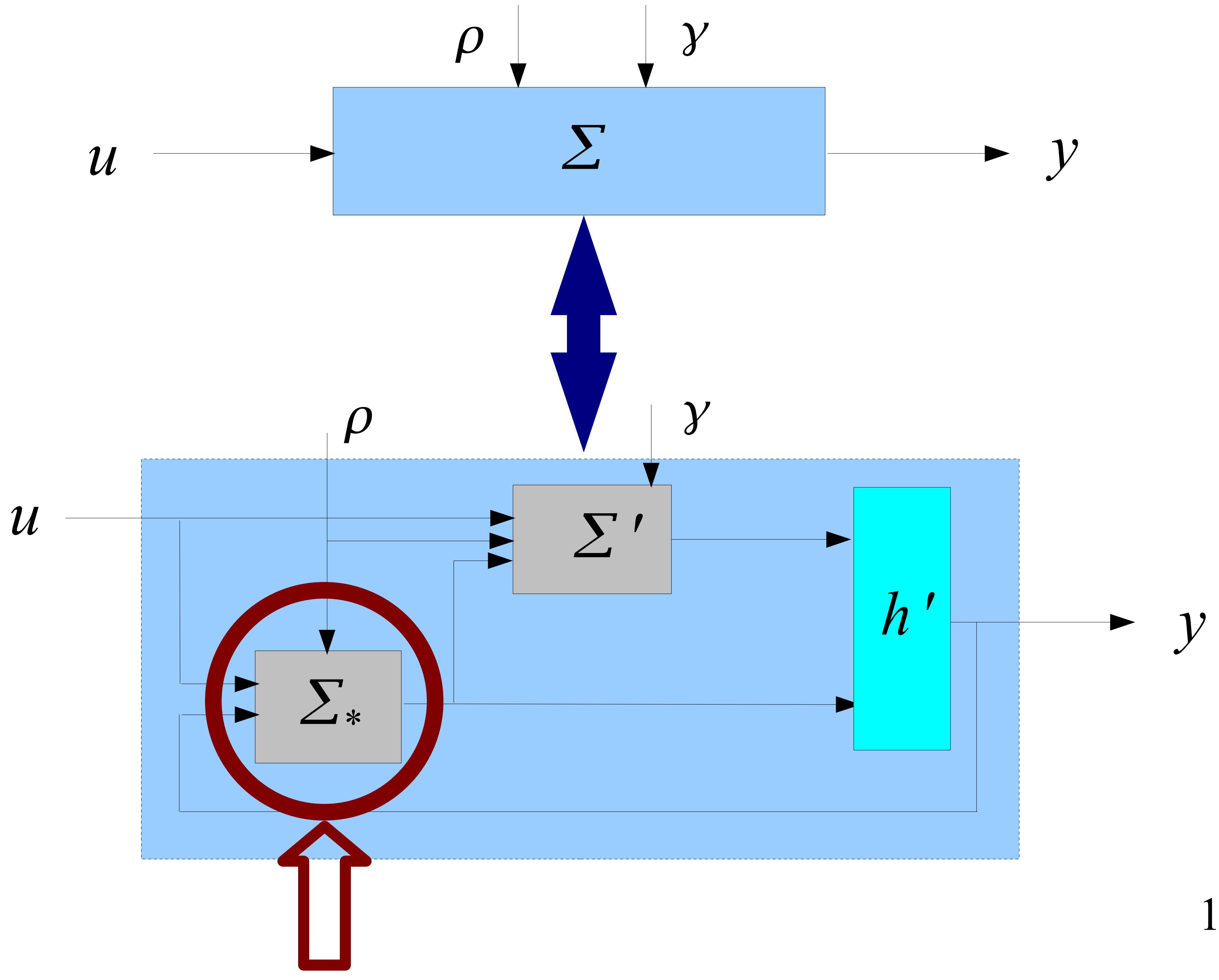
<u>Conditions sur le GR</u>

Découplage
(robustesse/sensibilité)

Dynamique
(convergence)

Les problèmes peuvent
être traités séparement

Découplage



Position du problème

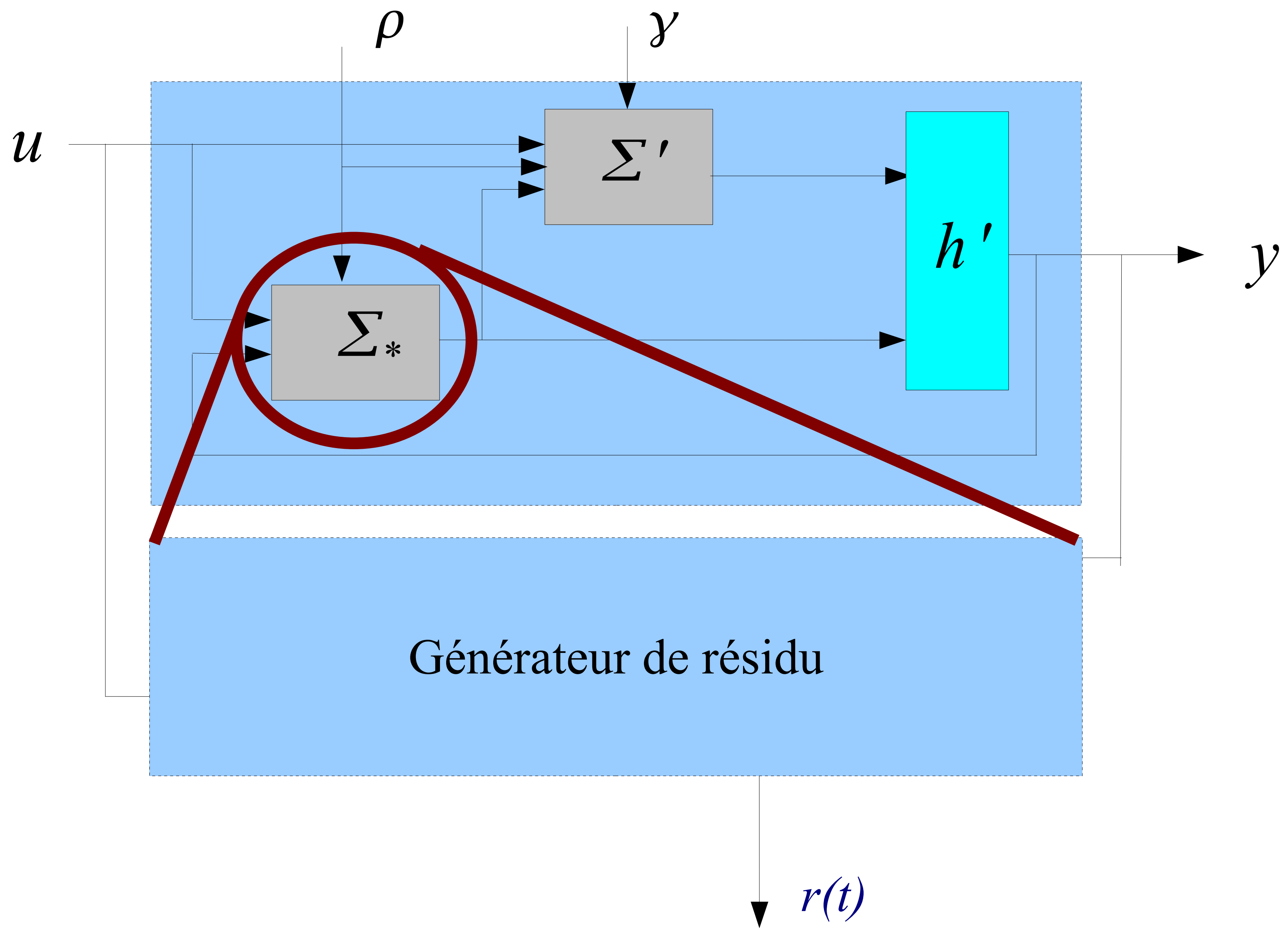
Le modèle du système à surveiller est le suivant

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t), \gamma(t), \rho(t)\right) \\ y(t) = h\left(x(t)\right) \end{cases}$$

avec $\gamma(t)$: perturbation
$\rho(t)$: défaillance

On veut découpler la perturbation

Génération de résidus



Position du problème

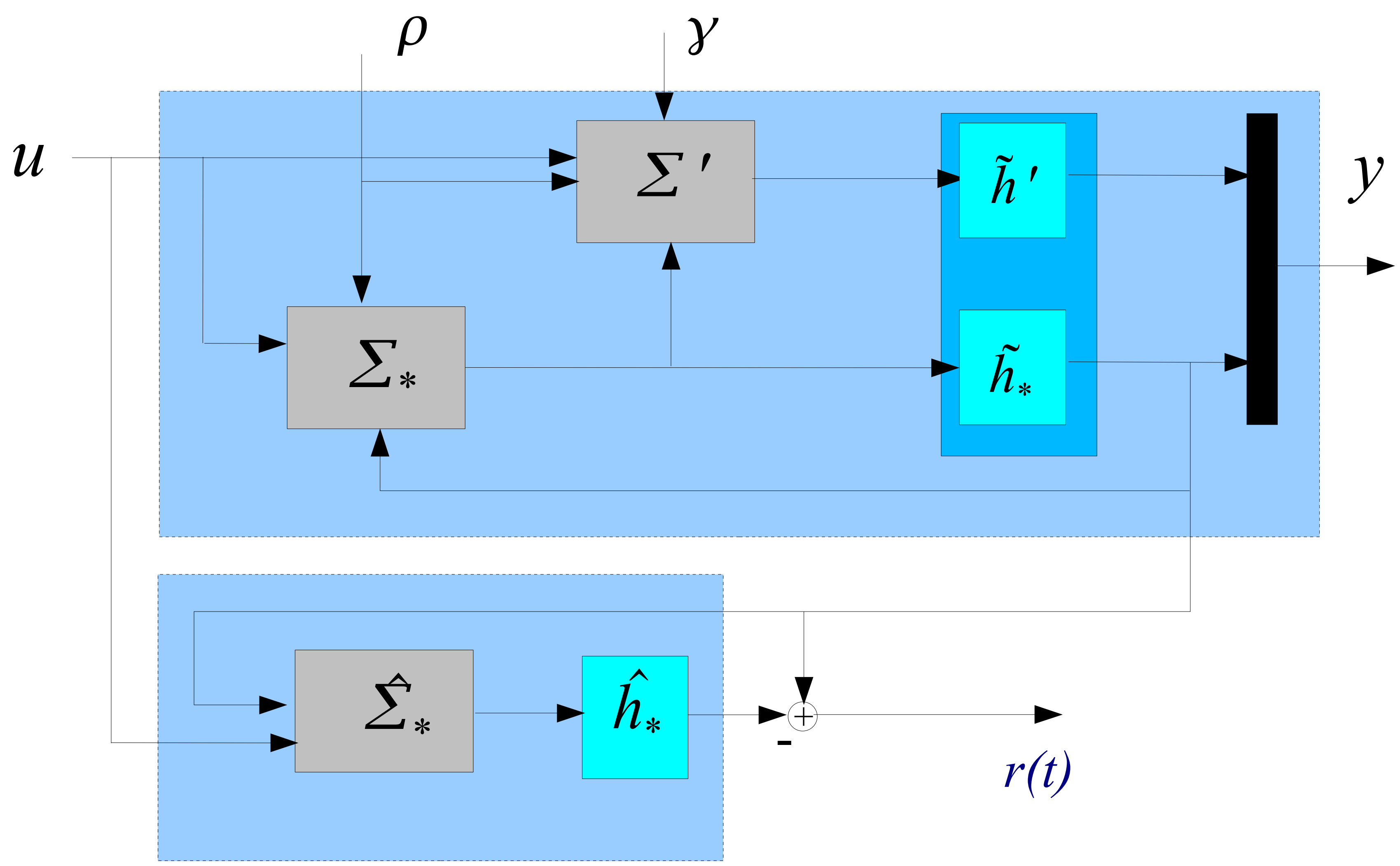
La partie du modèle du système qui est robuste à la petrubation

$$\Sigma_* : \left\{ \dot{x}_*(t) = f_*\left(x_*(t), y(t), u(t), \rho(t)\right) \right.$$

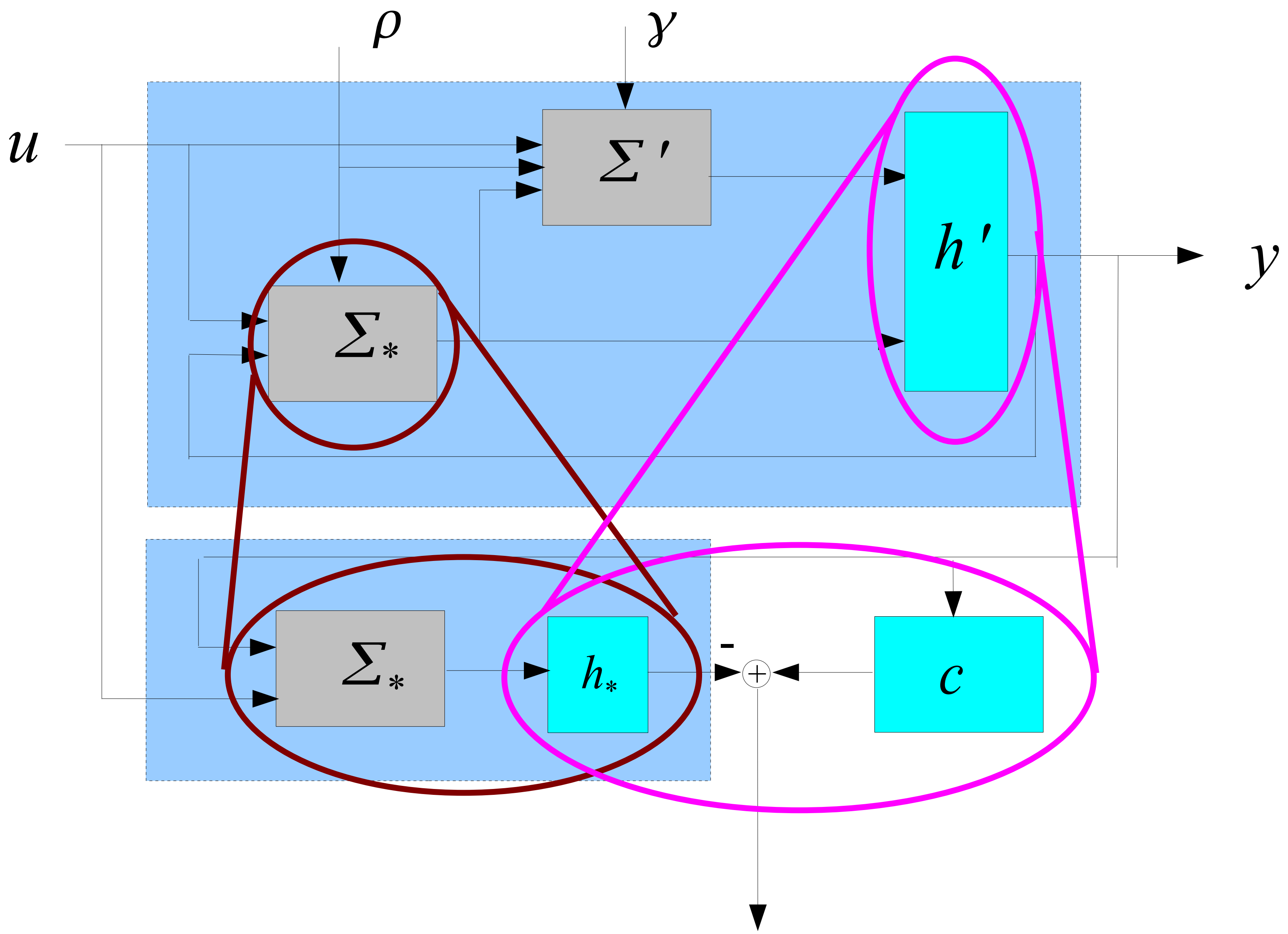
Cette partie servira à la construction du générateur de résidus GR

$$\mathrm{GR} : \begin{cases} \dot{z}(t) = f_0\left(z(t), u(t), y(t)\right) \\ r(t) = \Psi\left(z(t), y(t)\right) \end{cases}$$

Découplage Classique



Découplage avec l'AF



Algèbre des fonctions

- Ensemble d'outils mathématiques

  exprime l'interdépendance entre fonctions

- Dérivée de l'algèbre des paires (Hartmanis & Stearns 1966)

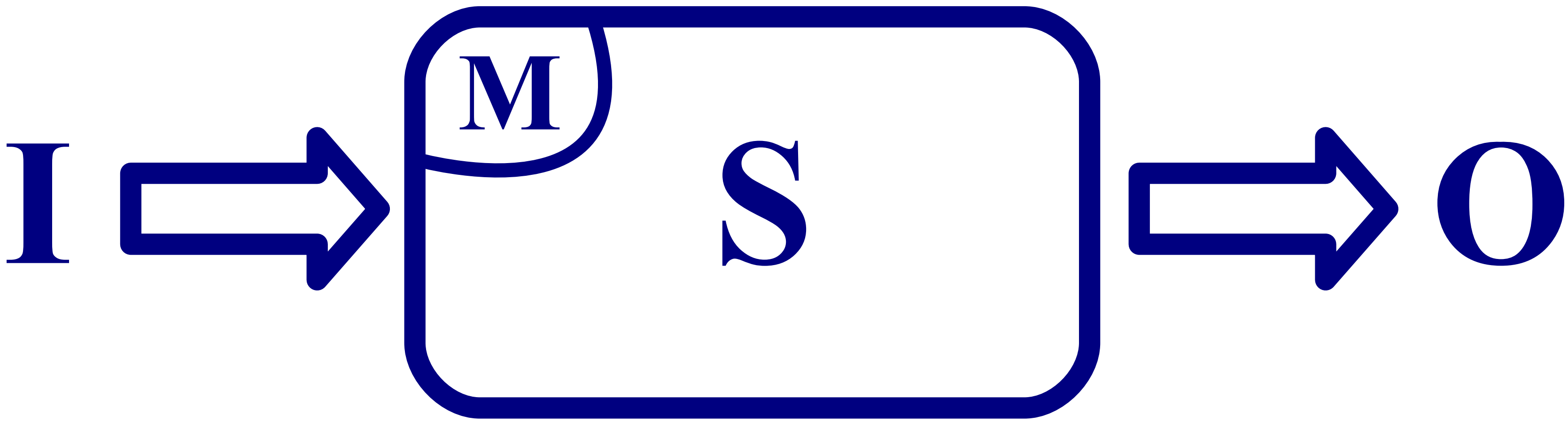
  description des machines séquentielles

- Adaptée aux ensembles infinis (Zhirabok & Shumsky 1993)

Machine Séquentielle

Une machine séquentielle M est un système algébrique défini par

$$M = (I, S, O, \delta, \lambda)$$



Avec $\delta : I \times S \rightarrow S$ fonction de transition

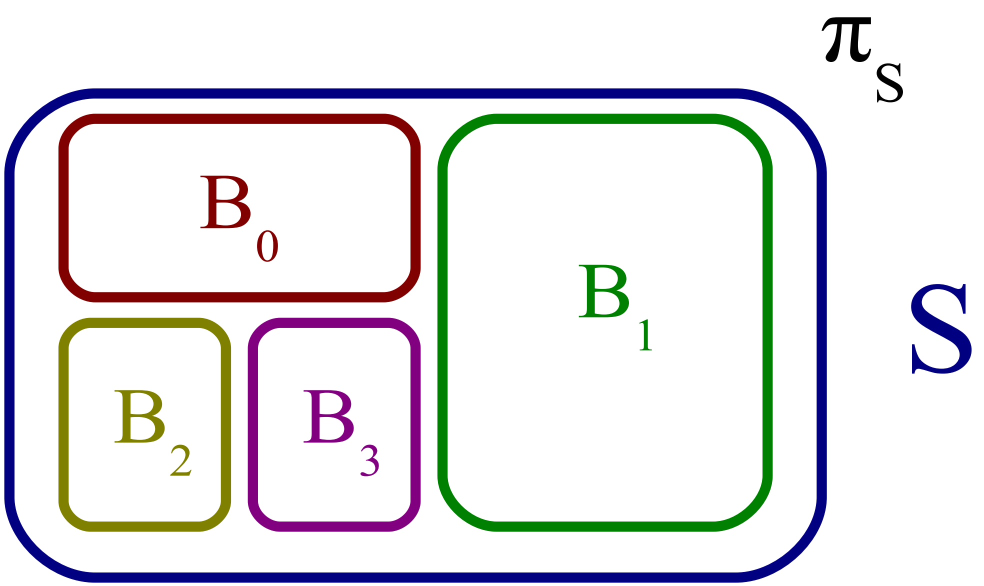
et

$\lambda : I \times S \rightarrow O$ fonction de sortie

Partitions

Une partition **π** sur un ensemble **S** est une collection de sous-ensembles disjoints dont l'union forme S

$$\pi_S = \{B_i\} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{l} B_i \cap B_j = \emptyset \\ \cup \{B_i\} = S \end{array}$$



Algèbre des paires

Problématique :

déterminer une machine M' qui garde les caractéristiques de M en réduisant sa taille

Nécessité de manipuler les partitions

⇓

Algèbre des Paires

de l'Algèbre des paires
à l'Algèbre des fonctions

Ensembles finis

Partitions

Algèbre des paires

Ensembles infinis

Fonctions

Algèbre des fonctions

Algèbre des fonctions

Ensemble de fonctions

Sous-ensemble de fonctions

Fonctions de base

Propriétés communes

Opérateurs :

- Ordonnancement
- Interaction
- Avancés

Operateurs d'ordonnancement

Opérateurs $\leq$ et $\equiv$:

soit $\alpha : X \to S$ $\quad \alpha \leq \beta$ ssi $\exists \nu : S \to T$ telle que $\nu(\alpha) = \beta$

$\beta : X \to T$ $\quad \alpha \equiv \beta$ ssi $\alpha \leq \beta \ \wedge \ \alpha \geq \beta$

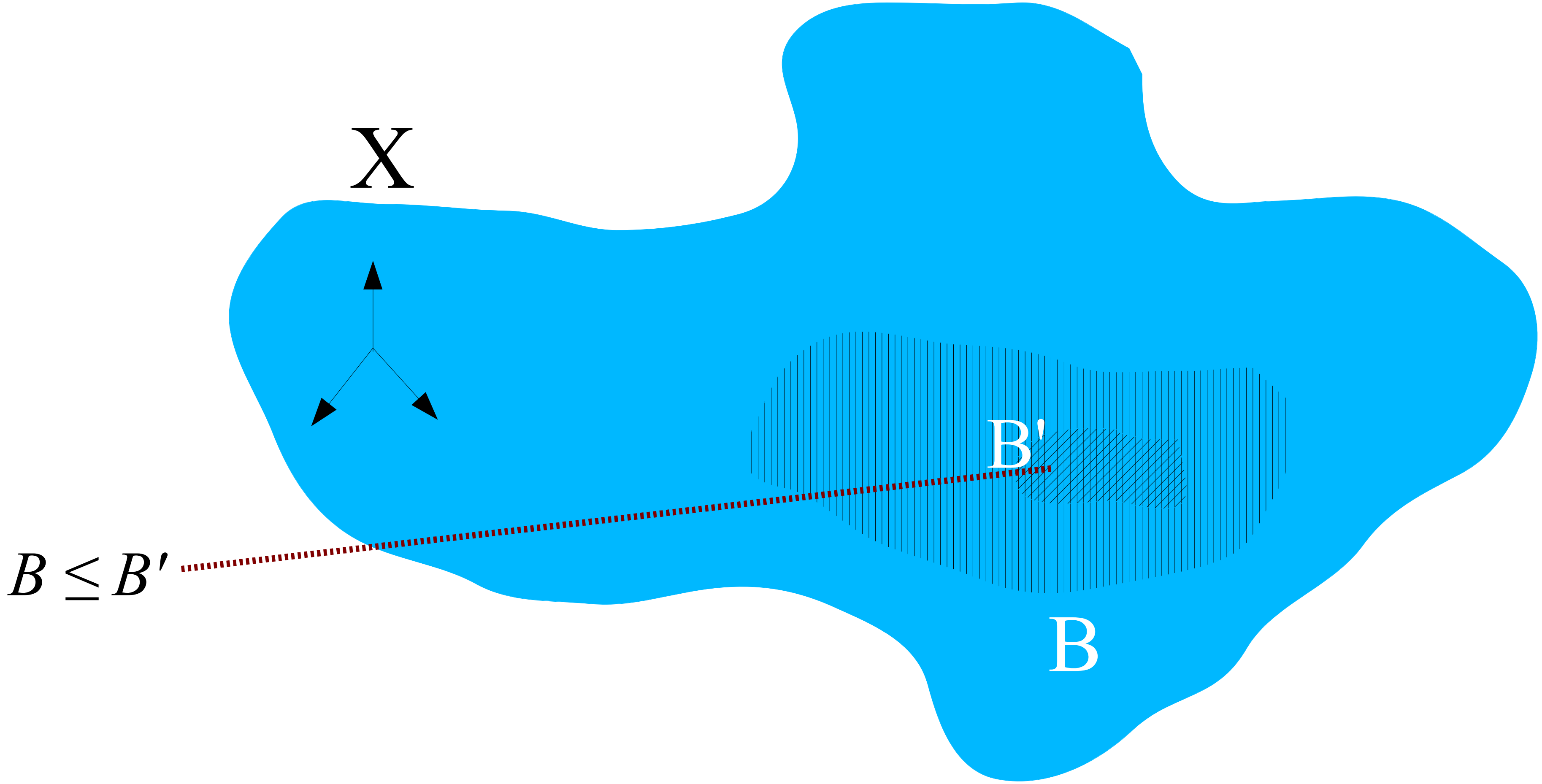
Illustration en linéaire $\quad \alpha(x) = A\,x \ , \ \beta(x) = B\,x$

$$A \leq B \quad \text{ssi} \quad \exists N \ : \ N\,A = B$$

$$A \leq B \quad \text{ssi} \quad rang[A] = rang\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$A \equiv B \quad \text{ssi} \quad rang[A] = rang[B]$$

Dualité
algébrique – géométrique



Opérateurs d'interaction

Opérateurs $\times$ et $\square$:

$$\Omega = \{ l \mid l \leq \alpha , l \leq \beta \}$$
$$\Psi = \{ l' \mid \alpha \leq l' , \beta \leq l' \}$$

$$\alpha \times \beta = g \Leftrightarrow g \in \Omega \quad \text{tel que} \quad \forall\, l \in \Omega : l \leq g$$
$$\alpha \,\square\, \beta = s \Leftrightarrow s \in \Psi \quad \text{tel que} \quad \forall\, l' \in \Psi : s \leq l'$$

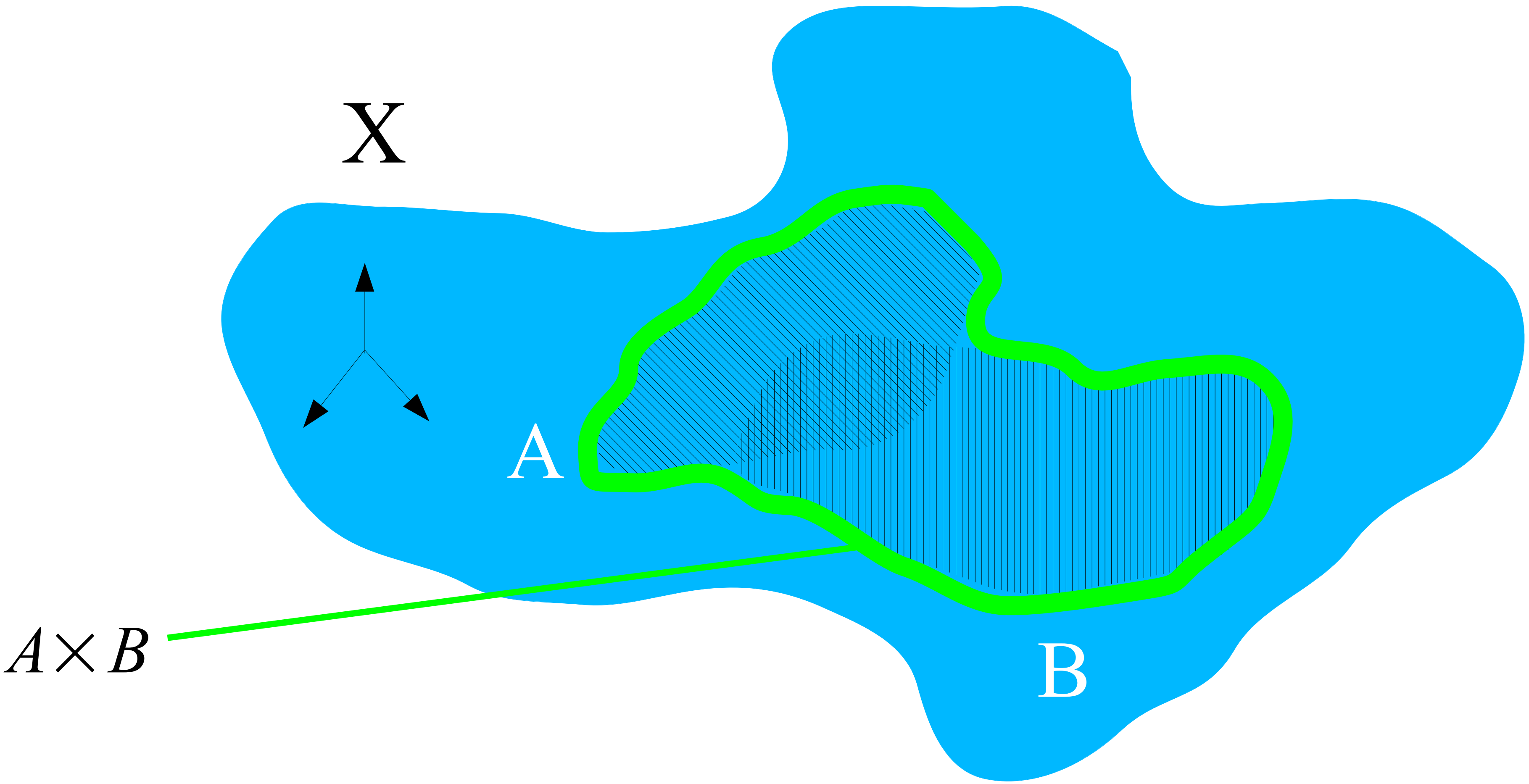
Illustration en linéaire

$$A \times B \;=\; \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

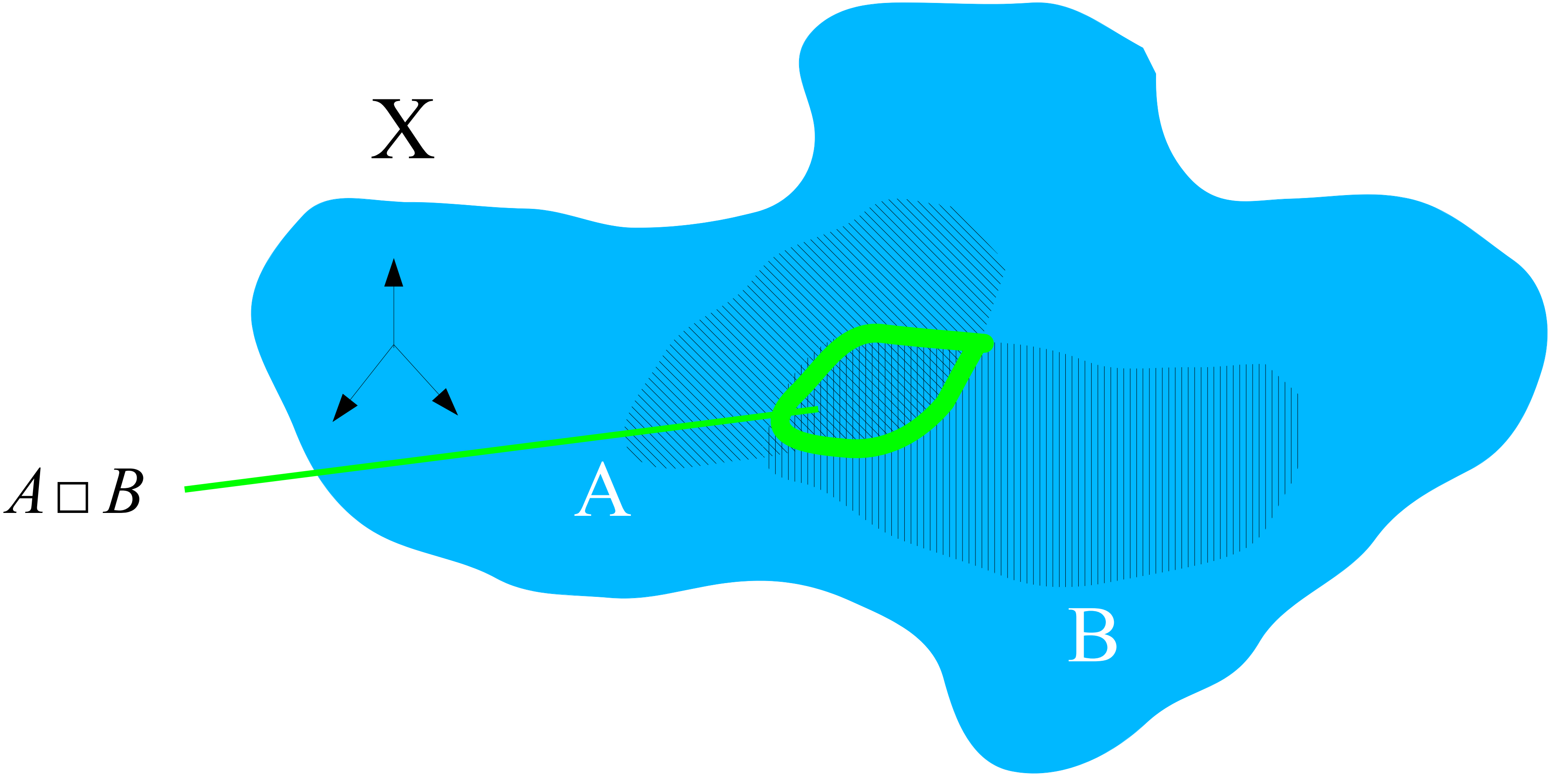
Linéairement indépendants

$$A \,\square\, B \;=\; Q.A = -P.B \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Dualité
algébrique – géométrique



Dualité
algébrique – géométrique



Concepts avancés

<u>Notion de paire :</u>

Soit $f : X \times U \rightarrow X$

$$(\alpha, \beta) \in \Delta_f \ \text{ ssi } \ \exists \nu : \ \nu(\alpha(x), u) = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} f(x, u)$$

$$\text{ou encore } \ \alpha \leq \frac{d\beta}{dx} f$$

Illustration en linéaire

$$(A, B) \in \Delta_f \quad \text{ssi} \quad rang(A) = rang \begin{bmatrix} A \\ BF \end{bmatrix}$$

Concepts avancés

Opérateurs M et m:

$$\left(\alpha, m(\alpha)\right) \in \Delta_f \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \Delta_f, m(\alpha) \leq \beta$$

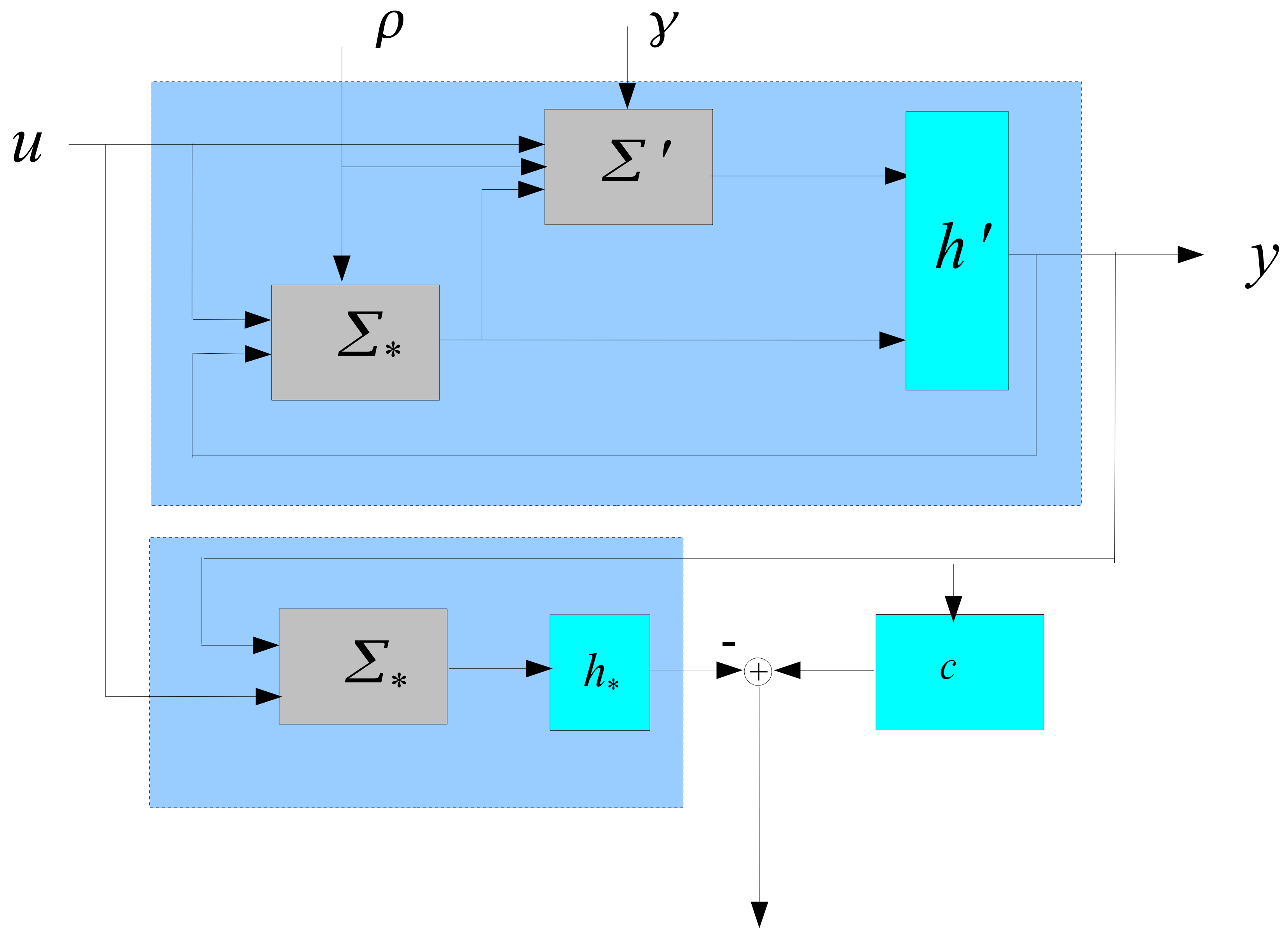
$$\left(M(\beta), \beta\right) \in \Delta_f \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \Delta_f, \alpha \leq M(\beta)$$

Illustration en linéaire

$M(B) = B F$

$m(A) = Q$ avec $Q F + N A = 0$ et où Q, N sont des matrices à déterminer

Découplage avec l'AF



Découplage avec l'AF

La transformation est réalisée par une fonction ϕ

$$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),\gamma(t),\rho(t)) \xrightarrow{\phi} \dot{x}_*=f_*(x_*(t),y(t),u(t),\rho(t))$$

$$\phi(x(t)) = x_*(t)$$

$$\Big\downarrow$$

$$f_*(\phi(x),h(x),u,\rho)=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}f(x,u,\gamma,\rho)$$

Découplage avec l'AF

puisque $\begin{cases} x_* = \phi(x) \\ y = h(x) \end{cases} \rightarrow f_*(\phi(x), h(x)) \rightarrow f_*((\phi \times h)(x))$

on peut écrire

$$f_*((\phi \times h)(x), u, \rho) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} f(x, u, y, \rho)$$

On retrouve l'expression de la paire

$$(\phi \times h, \phi) \in \Delta_f$$

Découplage avec l'AF

On obtient donc

$$\left(\phi \times h, \phi\right) \in \Delta_f$$

M (ϕ) est la plus grande fonction qui satisfait

$$\left(M\left(\phi\right), \phi\right) \in \Delta_f$$

$$\Downarrow$$

Condition de base

$$\phi \times h \ \leq \ M\left(\phi\right)$$

Découplage (suite)

- Le système découplé sera robuste aux perturbations si

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} f_{*}(\phi(x), h(x), u, \rho) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} f(x, u, \gamma, \rho) = 0$$

- Par analogie, le système sera sensible aux défaillances si

$$\frac{\partial}{\partial \rho} f_{*}(\phi(x), h(x), u, \rho) = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} f(x, u, \gamma, \rho) \neq 0$$

- En fonctionnement normal, le résidu sera nul

$$r = c(y) - y_{*} = c(h(x)) - h_{*}(\phi(x)) = 0$$

Découplage (suite)

Posons ϕ^0 tel que $$\forall \alpha : \frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,x}\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0 \; : \phi^0 \le \alpha$$

ϕ^0 forme une base pour toutes les fonctions robustes à l'entrée inconnue

par analogie $$\forall \beta : \frac{\mathrm{d}\,\beta}{\mathrm{d}\,x}\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 \; : \beta^0 \le \beta$$

β^0 forme une base de toutes les fonctions robustes aux défaillances

Exprimés en AF, le reste des conditions du PFGR s'écrivent

$$\begin{cases} \phi^0 \le \phi & \longrightarrow \text{robustesse aux perturbations} \\ \beta^0 \not\le \phi & \longrightarrow \text{sensibilité aux fautes} \\ \phi \le c \circ h & \longrightarrow \text{une partie du } \Sigma \text{ découplé est mesurable} \end{cases}$$

Notes sur ϕ^0

ϕ^0 est la fonction de base qui définit le sous-ensemble de fonctions robustes à la perturbation

Etape d'initialisation

la solution déterminée sera forcément une partie de ϕ^0

Conséquence :

- si $\phi^0=0$ alors pas de solutions
- si ϕ^0 mal défini alors la solution ne sera pas optimale

Point délicat de la méthode

Construction du ϕ

Théorème 1: *(Shumsky 1991)*

$$\phi^{i+1} = m\left(\phi^{i} \times h\right) \square \, \phi^{i}$$

$$\text{si} \quad \exists k \mid \phi^{k+1} \equiv \phi^{k}, \qquad \text{alors} \quad \phi^{*} = \phi^{k}$$

ϕ^{*} est la plus petite fonction générée par ϕ^{0} qui remplit les conditions

$$\begin{cases} \phi^{0} \leq \phi^{*} \\ m\left(\phi^{*} \times h\right) \leq \phi^{*} \end{cases}$$

Construction du ϕ

<u>**Théorème 2 :**</u> *(Zhirabok 1997)*

Le résidu sera robuste à γ et sensible aux défaillances ssi :

$$
\begin{cases}
\phi^{*} \leq \phi & \longrightarrow \text{Robuste à la perturbation} \\
\phi \,\square\, h \neq c^{ste} & \longrightarrow \text{Le Système découplé a une partie mesurable} \\
\phi \,\square\, \beta^{0} = c^{ste} & \longrightarrow \text{Sensible aux défaillances} \\
\phi \times h \leq M(\phi) & \longrightarrow \text{Condition de base}
\end{cases}
$$

Construction du ϕ

Algorithme

- $\phi_1 = c \circ h \quad , \quad j=1$
- *si* $h \times \phi_1 \times \ldots \times \phi_j \leq M\left(\phi_j\right)$, alors
  $\phi = \phi_1 \times \ldots \times \phi_j$
  sinon
- déterminer la plus grande fonction ϕ_{j+1} telle que $\phi_{j+1} \geq \phi^*$
  et que $h \times \phi_1 \times \ldots \times \phi_{j+1} \leq M(\phi_j)$
  incrémenter j

Sortie

Synthèse du système découplé

f_* est construit comme suit

$i^{ème}$ composante (ligne) de ϕ

$$x_{*i} = \phi_i(x) \quad \rightarrow \quad \dot{x}_{*i} = \frac{\mathrm{d}\,\phi_i}{\mathrm{d}\,x} f(x, u)$$

x_{*_i} est remplacé par $x_{*_{i+1}}$ et y , du fait de

$$\phi_{i+1} \times h \leq M(\phi_i)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{x}_{*i} = f_{*i}(x_{*i+1}, y, u) & \text{pour} \quad i = 1, .., k-1 \\ \dot{x}_{*i} = f_{*i}(y, u) & \text{pour} \quad i = k \end{cases}$$

Exemple 1 : cas linéaire

Modèle d'un système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = F\,x + G\,u + K\,\rho + E\,\gamma \\ y = H\,x \end{cases}$$

Le système découplé se met sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_* = F_*\,x_* + G_*\,u + J\,y \\ y_* = H_*\,x_* \end{cases}$$

Exemple 1 : cas linéaire

Modèle d'un réacteur chimique (Patton 89)

$$F : \begin{bmatrix} -3{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}6702 & 0 & 0{,}0702 \\ 0 & 0 & -36{,}2588 & 0{,}2588 \\ 0 & 0{,}6344 & 0{,}7781 & -1{,}4125 \end{bmatrix} \quad G : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad E : \begin{bmatrix} 1 \\ 20{,}758 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; K : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 1 : cas linéaire

Initialisation

Le GR sera découplé de la pérturbation et de la deuxième défaillance, en restant sensible à la première

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 20{,}758 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Phi^0 = \begin{bmatrix} -20{,}758 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

Exemple 1 : cas linéaire

En linéaire

$$h(x) = H\,x$$
$$\phi(x) = \Phi\,x$$
$$M(\phi)(x) = \Phi\,F\,x$$

Les condition à remplir

$$\Phi \times H \leq M(\Phi)$$

$$\Phi^0 \leq \Phi$$

$$\Phi \leq C \circ H$$

Exemple 1 : cas linéaire

alors $$\phi \times h \leq M(\phi) \rightarrow \Phi \times H \leq M(\Phi) \Leftrightarrow \exists N : N \begin{bmatrix} \Phi \\ H \end{bmatrix} = \Phi F$$

pour $N = [F_* \vdots J]$ alors $F_* \Phi + J H = \Phi F$

et $$\begin{cases} \phi \leq c \circ h \rightarrow H_* \Phi = C H \\ \Phi^0 \square H = C H \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\Phi^0 \square H \leq \Phi \Rightarrow \Phi^0 \leq \Phi$$

Ce qui donne

$$F_* \Phi + J H = \Phi F$$ Condition de base

$$\Phi_1 = C H = \Phi^0 \square H$$ Robustesse Mesurabilité Résidu nul

Exemple 1 : cas linéaire

On écrit

$$F_* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \; H_* = \begin{bmatrix} 1 \; 0 \; 0 \; \dots 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet la décomposition suivante

$$J_i H + \Phi_{i+1} = \Phi_i F \quad \text{et} \quad J_k H = \Phi_k F$$

$$\Big\downarrow \text{correspond}$$

$$H \times \Phi_{i+1} \leq M(\Phi_i) \quad \text{et} \quad H \leq M(\Phi_k)$$

En substituant k fois

$$\underline{\Phi_1 F^k = J_1 H F^{k-1} + J_2 H F^{k-2} + \dots + J_{k-1} H F + J_k H}$$

Condition de base

Exemple 1 : cas linéaire

La condition est remplie pour $k = 2$ par la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0{,}28\ a + 74{,}72 & 0{,}27\,b - 3{,}688 & -0{,}07\ b - 0{,}38 \\ a & b & -2{,}66\ b - 13{,}78 \end{bmatrix}$$

Avec deux composantes libres, puisque l'on a 4 équations pour 6 inconnues

Posons a=1 et b=1

$$J = \begin{bmatrix} 75 & -3{,}41 & -0{,}45 \\ 1 & 1 & -16{,}44 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 : cas linéaire

Construction du Φ

On pose

$$\Phi_1 = C\,H$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i F - J_i H$$

On obtient

$$\Phi = \begin{bmatrix} -20,758 & 1 & 0 & 0 \\ -0,27 & -0,26 & 0,45 & 0,07 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 : cas linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_* = F_* x_* + G_* u + J\, y \\ y_* = H_* x_* \\ r = C\, y - y_* \end{cases}$$

$$F_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_* = \Phi G = \begin{bmatrix} -20{,}758 & 1 & 0 \\ -0{,}27 & -0{,}26 & 0{,}45 \end{bmatrix}$$

$$H_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -20{,}758 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 75 & -3{,}41 & -0{,}45 \\ 1 & 1 & -16{,}44 \end{bmatrix}$$

Parallèle AF / UIO

On retrouve bien toutes les conditions de part et d'autre

Algèbre des fonctions	**UIO (Patton)**
$\phi \times h \leq M(\phi)$	$F_* \Phi + J\, H = \Phi\, F$
$\phi \leq c \circ h$	$H_* \Phi = C\, H$
$\Phi\, E = 0$	$C\, H\, E = 0$
$\Phi\, K \neq 0$	$C\, H\, K \neq 0$

Exemple 2:

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= u_1(t) - x_2(t) - (1+\rho(t))u_2(t)x_3(t) - (x_5)^2(t),\\
x_2(t+1) &= x_1(t) + \gamma(t)\\
x_3(t+1) &= u_1(t)x_2(t) + \mathrm{sign}(x_5(t))u_2(t)\\
x_4(t+1) &= (1+\rho(t))x_3(t) + x_5(t)\\
x_5(t+1) &= x_4(t)
\end{aligned}
$$

perturbation

défaillance

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= x_1(t)\\
y_2(t) &= x_3(t)\\
y_3(t) &= x_4(t)
\end{aligned}
$$

Zhirabok (1999)

Exemple 2

<u>Conditions de sensibilité/robustesse:</u>

En considérant les états robustes à γ

$$\phi^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Par analogie, on obtient :

$$\beta^0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

<u>Construction de ϕ^* :</u>

Théorème 1

$$\phi_1 = \phi_0 \square \mathrm{m}\left(h \times \phi_0\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \square \mathrm{m}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \phi_1 \square \mathrm{m}\left(h \times \phi_1\right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \phi_1$$

$$\phi^* = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Exemple 2

<u>Algorithme:</u>

- $\phi_1 = \; c \circ h \; = \phi^{*} \square h \; = x_4$
- $h \times \phi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \nleq \mathrm{M}\left(\phi_1\right)$ parce que $\mathrm{M}\left(\phi_1\right) = (1 + \rho)\, x_3 + x_5$

Une autre boucle donc (j=j+1)

Condition remplie

$$\phi = \phi_1 \times \phi_2 \; = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

- $\phi_2 = \; x_5 \; \geq \; \phi^{*}$
- $h \times \phi_1 \times \phi_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \leq \; \mathrm{M}\left(\phi_2\right) = \; x_4$

Exemple 2

Le système découplé s'écrit

$$\begin{cases} x_{*1}(t+1) = x_4(t+1) = x_3(t)+x_5(t) = y_2(t)+x_{*2}(t) \\ x_{*2}(t+1) = x_5(t+1) = y_3(t) \end{cases}$$

$$y_*(t)=x_{*1}(t)$$

avec

$$c(y) = y_3$$

et donc

$$r(t) = y_3(t)-y_*(t)$$

Conclusion

Les deux approches peuvent être transposées en linéaire :

- AF : manipulations de matrices bien connues
- Géométrie diff. : concepts de géométrie linéaire ; espace, noyau... etc

Approche géométrie diff.

- Difficilement transposable en discret

.

- Systèmes de type particulier, ex: "affine en la commande"

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Algèbre des fonctions

- Ne se limite pas à une forme particulière du modèle du Σ

- Gère les NL non différentiables

Conclusion

Pourquoi l'algèbre des fonctions ?

Alors que

- Nouvelle théorie (difficile à assimiler)
- Conditions d'application strictes

Parce que

- Méthode valide quel que soit le modèle:
  - Linéaire / non linéaire
  - Continu / discret
- Les outils et l'algorithme de découplage restent identiques

Perspectives

- Systématiser la recherche de ϕ^0 (NL)
- Application à des systèmes mélant états discrets et continus
- Application aux systèmes avec contraintes algébriques
- Linéarisation par injection d'entrées sorties avec des contraintes de robustesse.

The End

Convergence du résidu

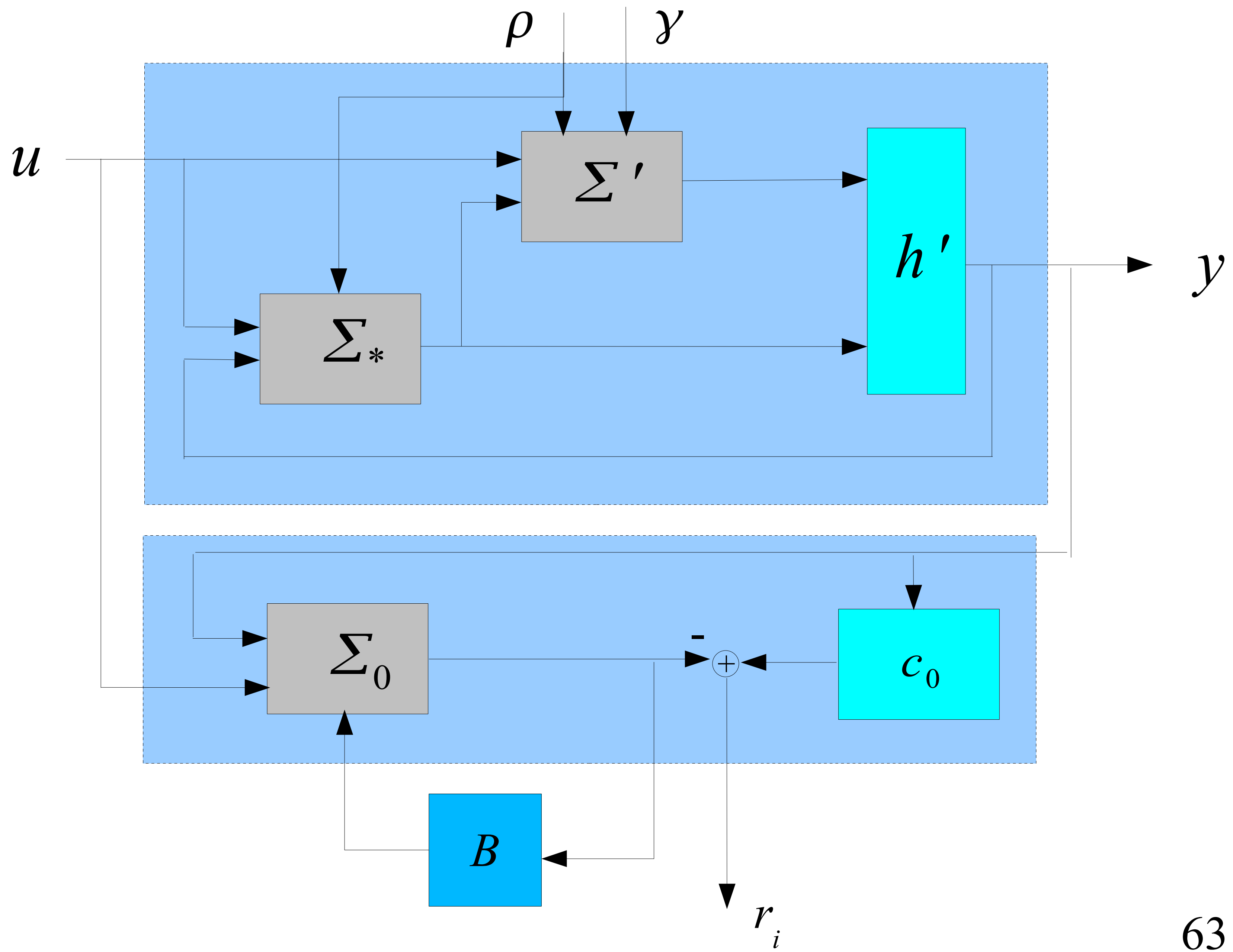
La convergence du résidu calculé à partir du système découplé n'est pas garantie au vu de la méthode. Un observateur doit être construit sur ce système en utilisant un feedback B. Puisque ϕ_i est déterminée par

$$h \times \phi_1 \times \ldots \times \phi_i \leq M\left(\phi_{i-1}\right)$$

alors elle ne dépend pas des coefficients de B. Ce qui permet de résoudre le problème de convergence de l'observateur indépendamment du problème de découplage.
L'observateur obtenu s'écrit

$$\Sigma_0 \; : \begin{cases} \dot{z} = f_0\left(z, y, u\right) \\ \hat{y} = h_0\left(z\right) \end{cases}$$

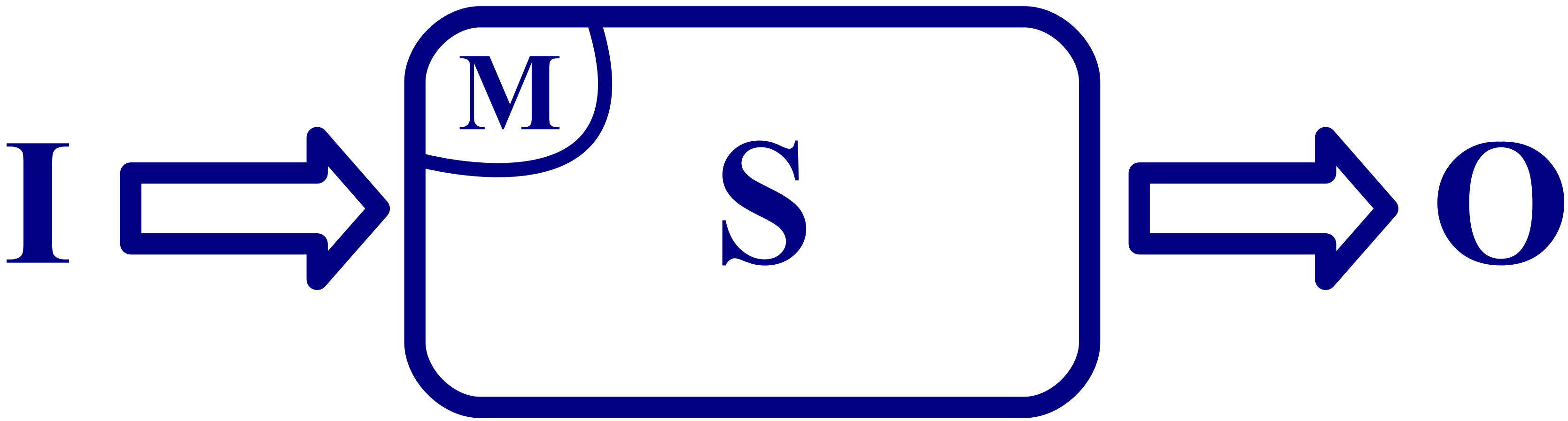
Observateur



Algèbre des paires

Une machine séquentielle M est un système algébrique défini par

$$M = (I, S, O, \delta, \lambda)$$



Avec $\delta : I \times S \rightarrow S$ fonction de transition

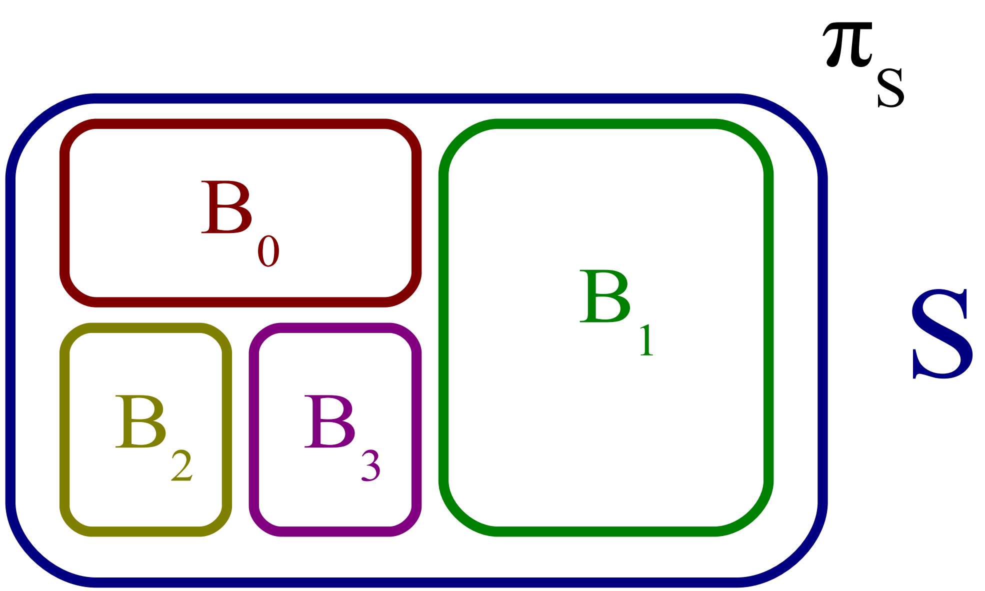
et

$\lambda : I \times S \rightarrow O$ fonction de sortie

Algèbre des paires

Une partition **π** sur un ensemble **S** est une collection de sous-ensembles disjoints dont l'union forme S

$$\pi_S = \{B_i\} \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{l} B_i \cap B_j = \emptyset \\ \cup\{B_i\} = S \end{array}$$



Algèbre des paires

Quelques opérateurs

≡ : **s** est équivalent à **t** ssi **s** et **t** font partie du même bloc d'une partition **π**

$$s \equiv t(\pi) \quad \text{ssi} \quad B_\pi(s) = B_\pi(t)$$

≤ : pour **π_1** et **π_2** définies sur **S, $\pi_1 \leq \pi_2$** ssi chaque bloc de **π_1** est contenu dans un bloc de **π_2**

$$\pi_1 \leq \pi_2 \quad \text{ssi} \quad \forall B_{\pi_1}(s), \exists B_{\pi_2}(t) : B_{\pi_1}(s) \subset B_{\pi_2}(t)$$

Algèbre des paires

+ : la partition $\pi_1+\pi_2$ sur S et une partition dont les éléments appartiennent à π_1 ou π_2

$$s \equiv t\left(\pi_1 + \pi_2\right) \text{ ssi } s \equiv t\left(\pi_1\right) \vee s \equiv t\left(\pi_2\right)$$

*** :** la partition $\pi_1.\pi_2$ sur S et une partition dont les éléments appartiennent simultanément à π_1 et π_2

$$s \equiv t\left(\pi_1 . \pi_2\right) \text{ ssi } s \equiv t\left(\pi_1\right) \wedge s \equiv t\left(\pi_2\right)$$

Algèbre des paires

Pour $\boldsymbol{\pi}_s$ et $\boldsymbol{\tau}_s$ deux partitions définies sur **S** de **M(I,S,O,δ,λ)** :

$(\boldsymbol{\pi}_s, \boldsymbol{\tau}_s)$ est une paire **S-S** ssi les images de s et t équivalents sur $\boldsymbol{\pi}_s$, sont elles mêmes équivalentes sur $\boldsymbol{\tau}_s$

$$s \equiv t(\pi_S) \;\Rightarrow\; \forall x \in I : \delta(s,x) \equiv \delta(t,x)(\tau_S)$$

Ce qui implique que connaissant le bloc contenant l'état **s**, et pour n'importe quelle entrée, on saura dans quel bloc sera contenu l'état suivant.

Algèbre des paires

Lemme : soit **(π,τ)** et **(π',τ')** formant des paires sur **M**

$$\Rightarrow \begin{cases} (\pi + \pi', \tau + \tau') \\ (\pi . \pi', \tau . \tau') \end{cases}$$ forment également des paires sur **M**

Pour une partition **π** (**τ**) sur **M** donnée, quelle serait la partition **τ** (**π**) correspondante formant une paire ?

Il est évident que **(π,I)** et **(O,τ)** forment des paires sur **M**

Algèbre des paires

Obtenir la plus grande partition $\boldsymbol{\pi}$ et la plus petite partition $\boldsymbol{\tau}$ possibles

<u>Pourquoi ?</u>

- $\boldsymbol{\tau}$ donne la plus grande quantité d'information qu'il est possible calculer sur l'état suivant connaissant seulement $\boldsymbol{\pi}$

- $\boldsymbol{\pi}$ donne la plus petite quantité d'information nécessaire sur l'état présent pour pouvoir passer a l'état suivant

Algèbre des paires

Définition

Soit $\boldsymbol{\pi}$ une partition de **S** sur **M**

$$m(\pi) = \prod \{\pi_i \mid (\pi, \pi_i) \text{ paire sur M}\}$$

$$M(\pi) = \sum \{\pi_i \mid (\pi_i, \pi) \text{ paire sur M}\}$$