JD-JN-MACS 07

A propos de quelques questions d'Identification et d'Estimation

M. Fliess[1], C. Join[2], L. Belkoura[3]

[1]LIX (CNRS, UMR 7161) & Projet ALIEN Inria-Futurs, Ecole polytechnique,

[2]CRAN (CNRS UMR 7039) & Projet ALIEN Inria-Futurs, UHP, Nancy,

[3]LAGIS (CNRS UMR 8146) & Projet ALIEN Inria-Futurs, USTL, Lille.

1. Introduction générale (MF)
2. Systèmes NL incertains (CJ)
3. Identification de retards (LB)
4. Conclusion générale (MF)

Généralités

Nouvelles méthodes d'estimation et d'identification qui conduisent à de nombreux résultats en automatique, linéaire ou NON, et en signal.

Pour éviter de se disperser, on se concentre sur le

NON-LINÉAIRE

avec, en supplément, un bref aperçu de la dimension infinie (systèmes à retards)

Observabilité et identifiabilité

Travaux de S. Diop et MF (1991) utilisant l'algèbre différentielle

Système observable

Un système est dit *observable* ssi toute variable du système, une variable d'état par exemple, s'exprime comme fonction *différentielle* des variables d'entrée et de sortie, c'est-à-dire comme fonction de ces variables et de leurs dérivées, jusqu'à un ordre fini.

Résultat : Définition équivalente, à la différence de langage près, à celle, classique, due à Hermann & Krener (1977), enseignée dans tous les cours avancés sur le le non-linéaire.

Paramètre *identifiable*

Il s'exprime comme fonction différentielle des variables d'entrée et de sortie.

Quantité *déterminable*

Elle s'exprime comme fonction différentielle des variables d'entrée et de sortie

Dérivateurs numériques

- Nécessité d'avoir de *bons* dérivateurs numériques pour appliquer ce qui précède.
- Très vaste littérature en ingéniérie et en mathématiques appliquées.
- En automatique, par exemple, nombreuses tentatives d'application des observateurs asymptotiques et des filtres de Kalman.

Nouveaux dérivateurs numériques

Estimer les coefficients du polynôme du 1er degré :

$$x(t) = a_0 + a_1 t, \quad t \geq 0$$

Avec les notations du calcul opérationnel :

$$X = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2}$$

Multiplions les deux membres par s^2 :

$$s^2 X = a_0 s + a_1$$

Dérivons les deux membres par rapport à s :

$$2sX + s^2 \frac{dX}{ds} = a_0$$

D'où

$$a_1 = s^2 \left[(1-2s)X - \frac{dX}{ds} \right]$$

Pour éviter la dérivation temporelle, c'est-à-dire les puissances positives de s, on multiplie les deux membres par s^{-N}, $N \geq 3$:

$$\boxed{a_1 s^{-N} = s^{-N+2} \left[(1-2s)X - \frac{dX}{ds} \right]}$$

Retour au temporel

$\frac{d}{ds}$ correspond à la multiplication par $-t$. Avec $N = 4$:

$$a_1 \frac{t^3}{6} = \int_0^t (t-\tau)(1+\tau)x(\tau)d\tau - \int_0^t \frac{(t-\tau)^2}{2} x(\tau)d\tau$$

Bonne estimation d'a_1 obtenue avec **courte fenêtre d'intégration**, c'est-à-dire t petit.

- Généralisation immédiate aux polynômes de degré quelconque.
- Généralisation aux fonctions analytiques en utilisant des développements de Taylor tronqués.

Robustesse par rapport aux bruits

- Les bruits sont considérés comme des *fluctuations rapides*. Ils sont donc atténués par des **passe-bas**, comme les intégrales itérées, correspondant à s^{-N}, $N \geq 1$.
- Justification mathématique : analyse *non standard*.
- **Remarque fondamentale** : Pas d'utilisation d'outils probabilistes. On n'utilise donc pas de caractérisations statistiques des bruits, souvent délicates à connaître.

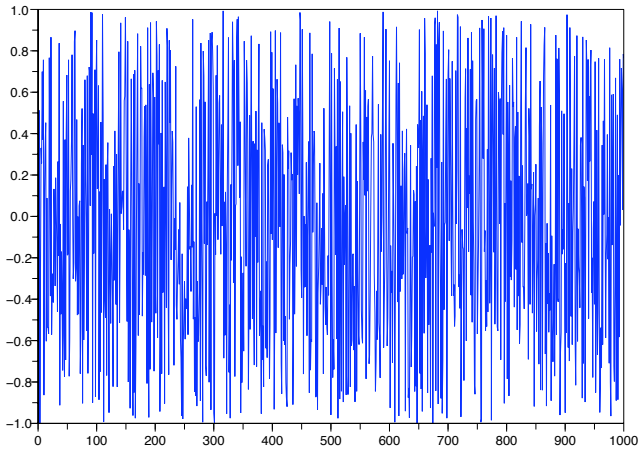
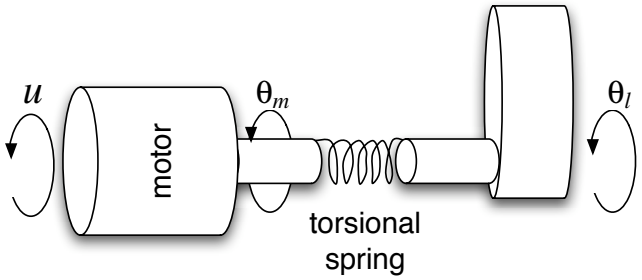


Figure: bruit uniforme non gaussien

- Estimation d'états
- Estimation de paramètres
- Diagnostic
- Commande et accommodation de défauts

Modèle

Système : moteur à courant continu et pendule



$$
\begin{aligned}
J_m\ddot{\theta}_m(t) &= \kappa\big(\theta_l(t)-\theta_m(t)\big) - B\dot{\theta}_m(t) + K_\tau u(t)\\
J_l\ddot{\theta}_l(t) &= -\kappa\big(\theta_l(t)-\theta_m(t)\big) - mgh\sin(\theta_l(t))\\
y(t) &= \theta_l(t)
\end{aligned}
$$

- θ_m, θ_l : position angulaire du rotor et du pendule
- J_m, J_l, h, m, κ, B, K_τ et g paramètres physiques constants et connus.

Nombreuses références dans la littérature

-Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities, X Fan, M Arcak - Systems and Control Letters, 2003

-Control via state estimations of some nonlinear systems, M Fliess, H Sira-Ramírez,NOLCOS, 2004

-Observer Design for Nonlinear Systems: An Approach Based on the Differential Mean Value Theorem, A Zemouche, M Boutayeb, GI Bara,Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference, 2005

-Current Trends in Nonlinear Systems And Control: In Honor of Petar Kokotovic and Turi Nicosia, L Menini, CT Abdallah, T Nicosia, PV Kokotović, 2006

Système plat

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{K_\tau}\Big(J_m\ddot{\theta}_m(t) - \kappa\big(\theta_l(t) - \theta_m(t)\big) + B\dot{\theta}_m(t)\Big) \\ &= \frac{1}{K_\tau}\Big(\frac{J_m}{\kappa}\left[J_l v(t) + \kappa\ddot{y}_e(t) + mgh(\ddot{y}_e(t)\cos(y_e(t)) - (\dot{y}_e(t))^2\sin(y_e(t)))\right] \\ &+ J_l\ddot{y}_e(t) + mgh\sin(y_e(t))\frac{B}{\kappa}\left[J_l y_e^{(3)}(t) + \kappa\dot{y}_e(t) + mgh\dot{y}_e(t)\cos(y_e(t)\right]\Big) \end{aligned}$$

Correcteur

$$\begin{aligned} v(t) &= y^{*(4)}(t) - \gamma_4(y_e^{(3)}(t) - y^{*(3)}(t)) \\ &-\gamma_3(\ddot{y}_e(t) - \ddot{y}^*(t)) - \gamma_2(\dot{y}_e(t) - \dot{y}^*(t)) \\ &-\gamma_1(y_e(t) - y^*(t)) \end{aligned}$$

où les λ_i stabilisent la dynamique d'erreur.

Reconstructeur d'état

$$[\theta_m]_e(t) = \frac{1}{\kappa}\Big(J_l\ddot{y}_e(t) + mgh\sin(y_e(t))\Big) + y_e(t)$$

$J_m = 3.7 \times 10^{-3}\ kgm^2$, $J_l = 9.3 \times 10^{-3}\ kgm^2$, $h = 1.5 \times 10^{-1}\ m$, $m = 0.21\ kg$, $B = 4.6 \times 10^{-2}\ m$, $K_\tau = 8 \times 10^{-2}\ NmV^{-1}$.
Bruit blanc gaussien N(0; 0.01).

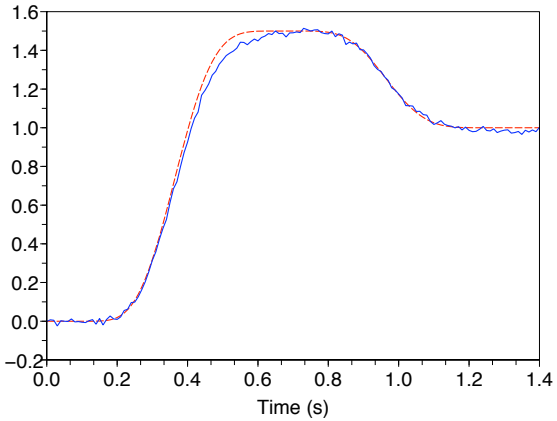


Figure: Sortie

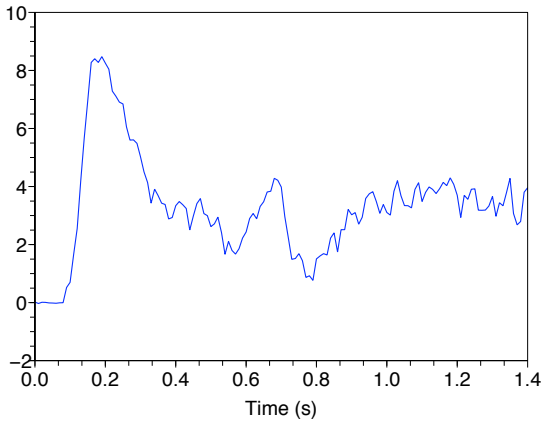


Figure: Commande

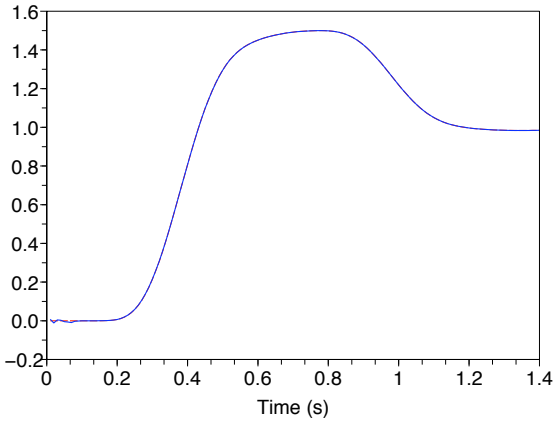


Figure: Sortie débruitée

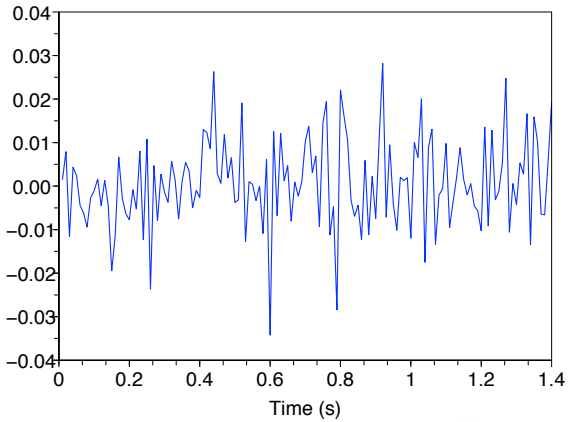


Figure: Bruit

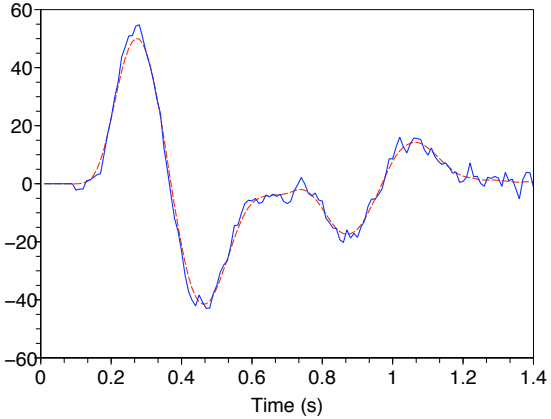


Figure: $\frac{d^2}{dt^2}$ Sortie

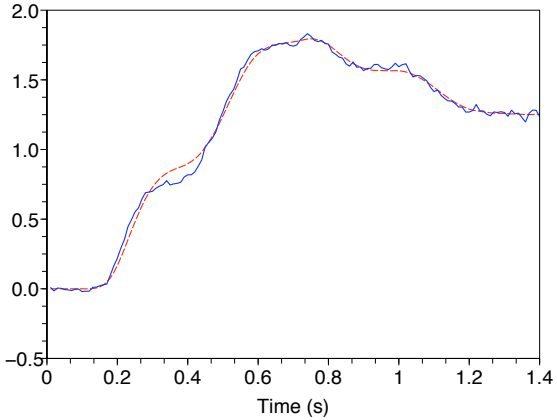


Figure: θ_l

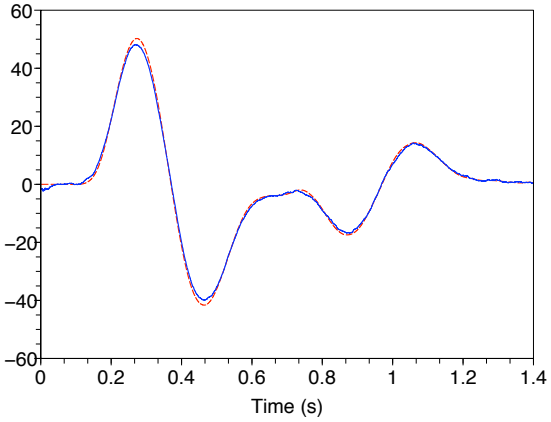


Figure: $\frac{d^2}{dt^2}$ Sortie retardé

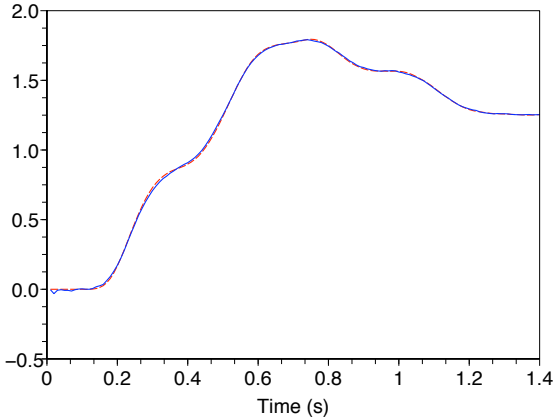
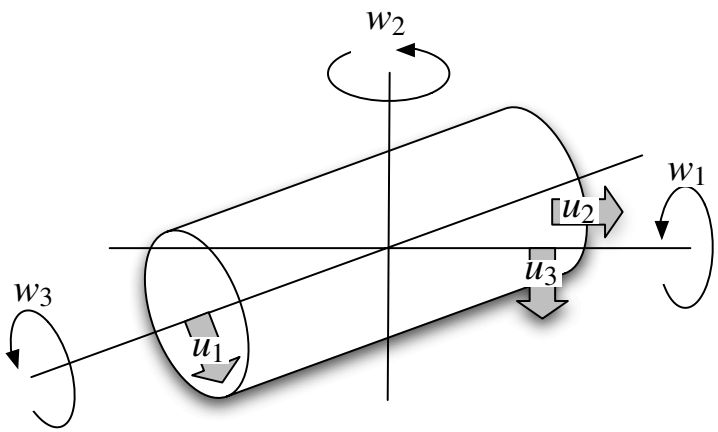


Figure: θ_l retardé

Système : corps rigide
équations d'Euler



Modèle

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{w}_1(t) &= (I_2 - I_3)w_2(t)w_3(t) + u_1(t)\\
I_2\dot{w}_2(t) &= (I_3 - I_1)w_3(t)w_1(t) + u_2(t)\\
I_3\dot{w}_3(t) &= (I_1 - I_2)w_1(t)w_2(t) + u_3(t)
\end{aligned}
$$

- w_i la vitesse angulaire
- I_i le moment d'inertie **inconnu**

Indentification des moments d'inertie

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 & -w_2 w_3 & w_2 w_2 \\ w_1 w_3 & \dot{w}_2 & -w_1 w_3 \\ -w_1 w_2 & w_1 w_2 & \dot{w}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Commande par platitude

$$\begin{aligned} u_1(t) = \quad & -([I_2]_e - [I_3]_e)[w_2]_e(t)[w_3]_e(t) \\ & +[I_1]_e\Big(-\lambda_{11}[w_1]_e(t) - \lambda_{01}\int_0^t [w_1]_e(\sigma)d\sigma\Big) \\ u_2(t) = \quad & -([I_3]_e - [I_1]_e)[w_3]_e(t)[w_1]_e(t) \\ & +[I_2]_e\Big(-\lambda_{12}[w_2]_e(t) - \lambda_{02}\int_0^t [w_2]_e(\sigma)d\sigma\Big) \\ u_3(t) = \quad & -([I_1]_e - [I_2]_e)[w_1]_e(t)[w_2]_e(t) \\ & +[I_3]_e\Big(-\lambda_{13}[w_3]_e(t) - \lambda_{03}\int_0^t [w_3]_e(\sigma)d\sigma\Big) \end{aligned}$$

λ_{1i}, λ_{0i} comme pour un correcteur PI.

$\lambda_{1\iota} = 2\xi\varpi$, $\lambda_{0\iota} = \varpi^2$, $\iota = 1, 2, 3$, où $\xi = 0.707$, $\varpi = 0.5$.
Moments initiaux $I_1 = 0.2$, $I_2 = 0.1$ et $I_3 = 0.1$.
Bruit blanc gaussien $N(0; 0.005)$.

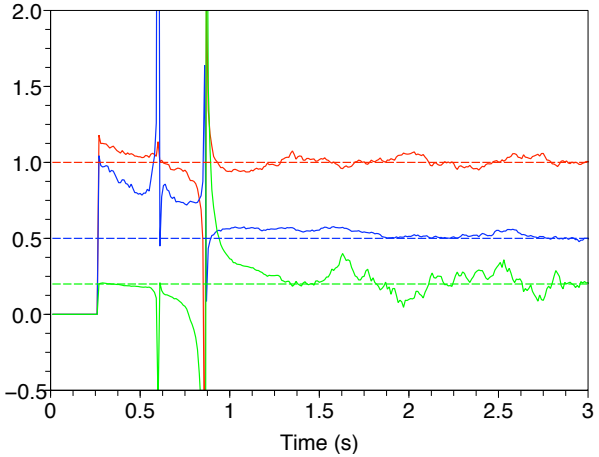


Figure: Estimation

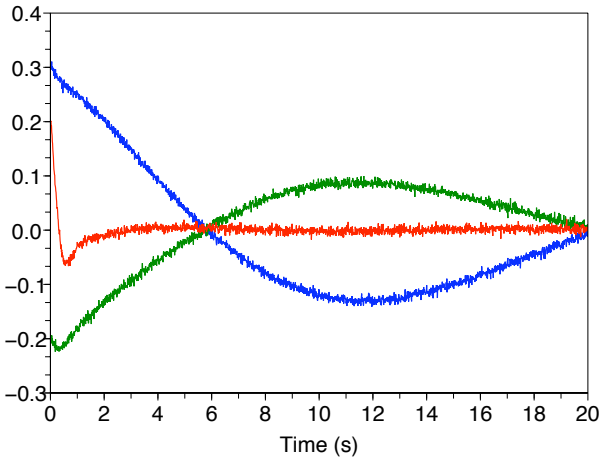


Figure: Sans utiliser d'estimation

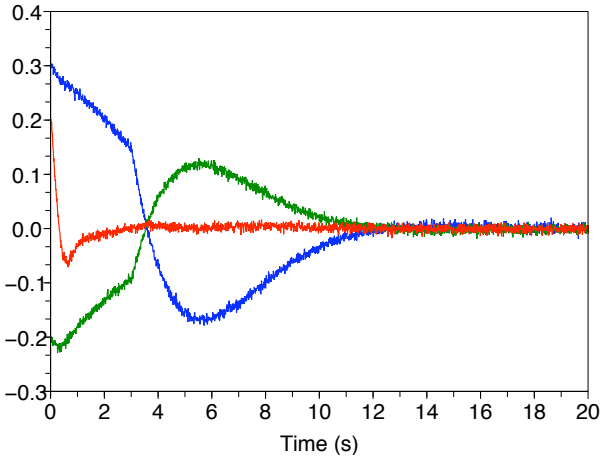
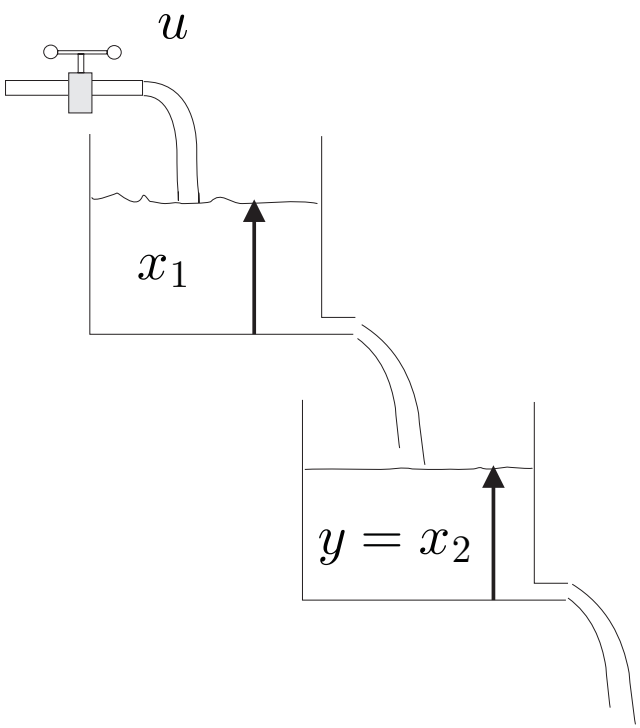


Figure: En utilisant les estimations

Système
important en diagnostic



Modèle

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{c}{A}\sqrt{x_1} + \frac{1}{A}u(1-\mathbf{w}(t)) + \varpi \\ \dot{x}_2 &= \frac{c}{A}\sqrt{x_1} - \frac{c}{A}\sqrt{x_2} \\ y &= x_2\end{aligned}$$

- c et A constantes connues
- ϖ perturbation constante inconnue
- $\mathbf{w}$ défaut actionneur, $t_I >> 0$

Estimation de la perturbation et du défaut

A partir de

$$\dot{x}_1 = -\frac{c}{A}\sqrt{x_1} + \frac{1}{A}u + \varpi$$

suite à la multiplication par t et en intégrant par partie

Perturbation

$$\hat{\varpi} = \begin{cases} \text{arbitraire} & t \in [0, \epsilon) \\ \dfrac{t\hat{x}_1 - \int_0^t \left[\hat{x}_1 - \sigma\left(\frac{c}{A}\sqrt{\hat{x}_1(\sigma)} - \frac{1}{A}u(\sigma)\right)\right] d\sigma}{t^2/2} & t \in [\epsilon, \infty) \end{cases}$$

avec $\hat{x}_1 = \left(\frac{A}{c}\dot{y}_e + \sqrt{y}\right)^2$.

Défaut

$$\hat{\mathbf{w}} = 1 - \frac{1}{u}\left(2A\left(\frac{A}{c}\dot{y}_e + \sqrt{y}\right)\left(\frac{A}{c}\ddot{y}_e + \frac{\dot{y}_e}{2\sqrt{y}}\right) + c\left(\frac{A}{c}\dot{y}_e + \sqrt{y}\right) - A\hat{\varpi}\right)$$

Commande tolérante à la perturbation et au défaut

Système plat

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\left(1-\hat{\mathbf{w}}(t)\right)}\Big(-A\hat{\varpi} + 2A\big(\tfrac{A}{c}\dot{y} + \sqrt{y}\big)\big(\tfrac{A}{c}v + \tfrac{\dot{y}}{2\sqrt{y}}\big) + c\big(\tfrac{A}{c}\dot{y} + \sqrt{y}\big)\Big) \\ v &= \ddot{y}^* - \mathcal{G}(y - y^*(t)) \end{aligned}$$

$\mathcal{G}$: *correcteur Proportionnel Intégral Généralisé (GPI)*

Fonction de transfert : $\dfrac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s(s+k_3)}$

Simulations

$t > 1.5s$ défaut actionneur : $\mathbf{w} = 0.7$
avant, on estime $\varpi = 0.2$
à partir de $t = 2.5s$ la commande utilise l'estimation du défaut
bruit $N(0; 0.01)$

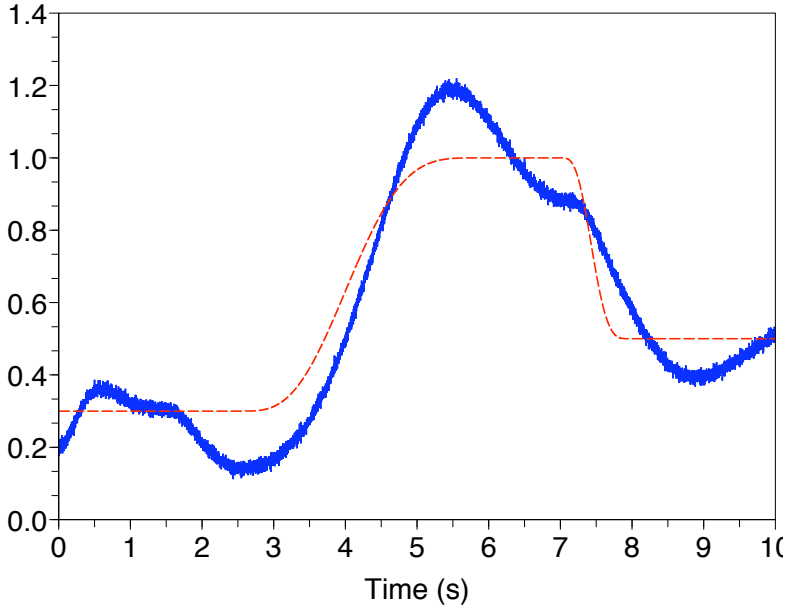


Figure: Sans accommodation

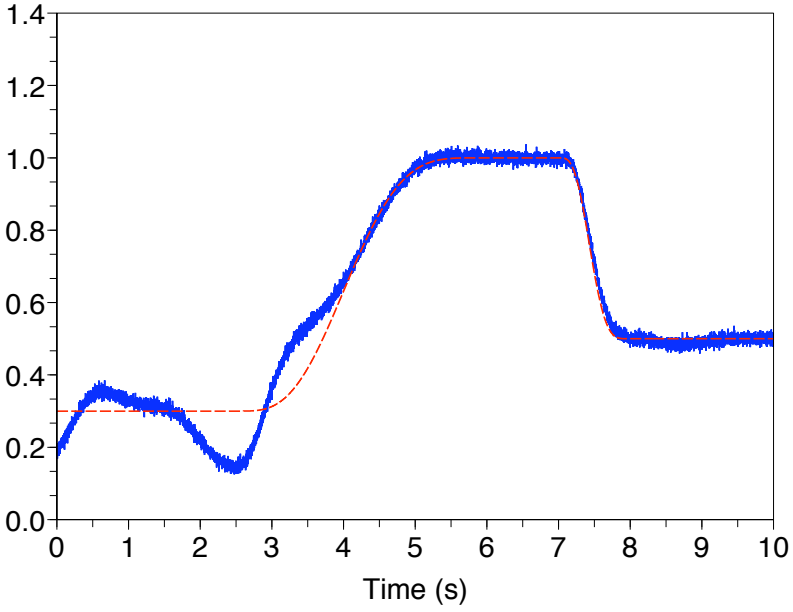


Figure: Avec accommodation

Introduction

- Dans un cadre assez général, les systèmes retardés peuvent être décrits par une équation différentielle fonctionnelle de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u_t), \qquad x_t = x(t+\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0, \\ x_0 &= \varphi \qquad\qquad \text{fonction à support } \subset [-h, 0]\,. \end{aligned}$$

  La dimension de la condition initiale les classe dans la catégorie des systèmes de dimension infinie.

- La technique d'identification des paramètres et retards repose en grande partie sur l'annihilation des signaux structurés [1] (par ex. entrées, perturbations, C.I.).
- Une formulation équivalente Domaine opérationnel (Laplace)-Domaine fonctionnel (Distribution) peut être envisagée.

[1] définition algébrique dans [Fliess & Ramirez, 03].

Introduction

Exemple: Annihilation d'un échelon retardé

Opérationnel ($H(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$)	Fonctionnel ($H(t-\tau)$)
$(\tau + \frac{d}{ds})\, s\, H(s) = 0$	$(t-\tau)\, \frac{d}{dt}\, H(t-\tau) = 0$

- *Conséquence*: le retard τ est passé du statut d'argument à celui d'argument et *coefficient*.

Théorème (Schwartz, 1966)

Si T a un support compact K et est d'ordre (nécessairement fini) m, $\alpha\, T = 0$ lorsque α et ses dérivées d'ordre $\leq m$ s'annulent sur K.

Entrées structurées

Premier exemple

Identification du retard d'une entrée indicielle d'un 1er ordre

Formulation opérationnelle $(y(s), u(s))$	Formulation fonctionnelle $(y(t), u(t))$
$sy - a\,y = y_0 + K\,u_0\,e^{-\tau s}/s$	$\dot{y} - a\,y = y_0\delta + K\,u_0\,H(t-\tau)$
$\frac{1}{s^2}(\frac{d}{ds^3} - \tau\frac{d}{ds^2})s\times(sy - a\,y) = 0$	$\int\int t^2(t-\tau)\times d/dt\ (\dot{y} - a\,y) = 0.$

$$\boxed{\tau = \frac{\int\int(t^3\ddot{y} + a\,t^3\dot{y})}{\int\int(t^2\ddot{y} + a\,t^2\dot{y})} \quad t > \tau.}$$

- Formule donnant τ non asymptotique et valable pour presque tout $t > \tau$.
- Indépendante du gain K, de u_0 et de la C.I..

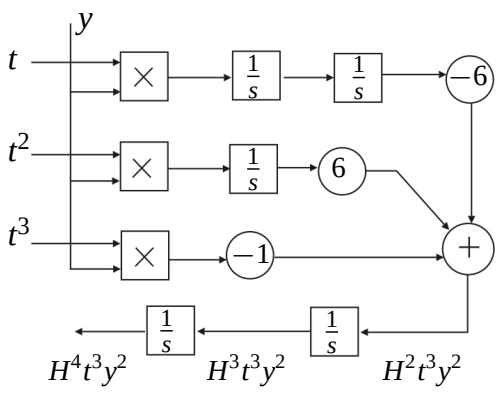
Entrées structurées

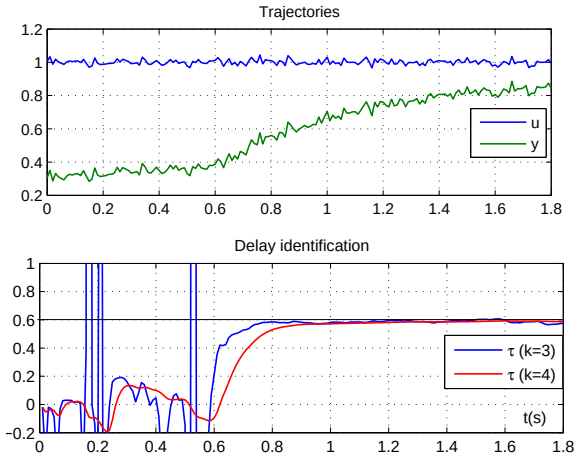
Premier exemple

- Aucune dérivée du signal n'est utilisée grâce à l'Int.p.p., par ex:

$$\int\int t^3\ddot{y} = -6\int\int ty + 6\int t^2 y - t^3 y$$

- Schéma (partiel) de réalisation et résultat en simulation:





- Contexte bruité: des filtres peuvent être substitués aux intégrateurs.

Etude expérimentale (Feedback PT326)

Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

La dynamique inconnue du processus nécessite une identification simultanée des paramètres et retard.

$$Modele: \ (s+a)y = y_0 + K\,e^{-\tau\,s}u, \qquad entree: \ u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k\,\chi_{[kT,(k+1)T]}.$$

1. d/dt : transforme le second membre en une distribution singulière de support $\{0, kT+\tau\}$.
2. $\alpha\times$: annihilation du second membre $\Rightarrow$ relation non linéaire en les paramètres a et $\lambda = e^{j\omega\tau}$.

$$\alpha \times (\ddot{y} + a\dot{y}) = 0, \quad avec \quad \alpha = (1-e^{-\gamma t})^2\,(1-\lambda e^{-j\omega t}), \quad \lambda = e^{j\omega\tau}.$$

3. H_i*: convolution $\Rightarrow$ causalité/filtrage et relations indépendantes:

$$H_i = \frac{1}{s^2+\omega^2}\,\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^i.$$

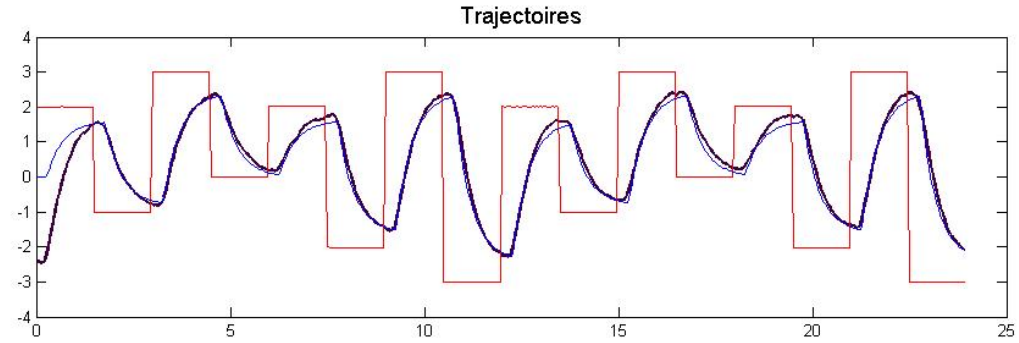
Etude expérimentale (Feedback PT326)

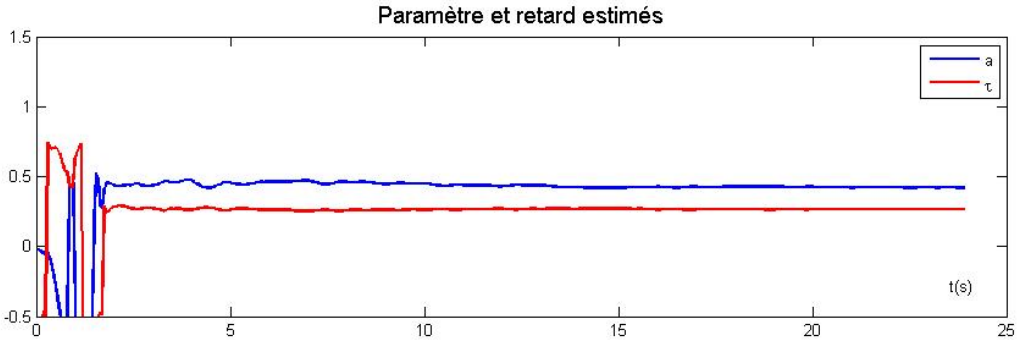
Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

- La non linéarité peut être appréhendée via une formulation spectrale:

$$\left[\begin{pmatrix} H_1\alpha_1\ddot{y} & H_1\alpha_1\dot{y} \\ H_2\alpha_1\ddot{y} & H_2\alpha_1\dot{y} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} H_1\alpha_2\ddot{y} & H_1\alpha_2\dot{y} \\ H_2\alpha_2\ddot{y} & H_2\alpha_2\dot{y} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Résultats expérimentaux





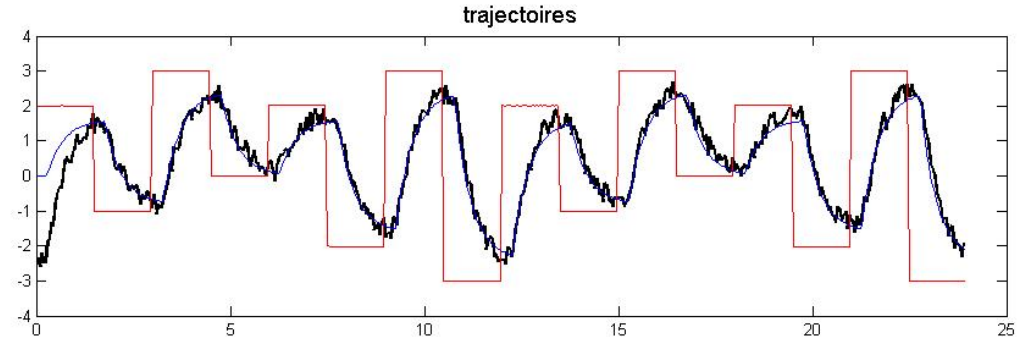
Etude expérimentale (Feedback PT326)

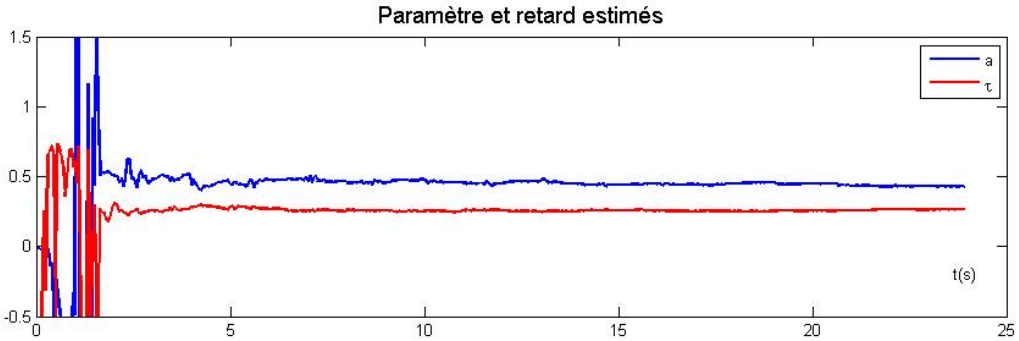
Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

- La non linéarité peut être appréhendée via une formulation spectrale:

$$\left[\begin{pmatrix} H_1\alpha_1\ddot{y} & H_1\alpha_1\dot{y} \\ H_2\alpha_1\ddot{y} & H_2\alpha_1\dot{y} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} H_1\alpha_2\ddot{y} & H_1\alpha_2\dot{y} \\ H_2\alpha_2\ddot{y} & H_2\alpha_2\dot{y} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- Résultats expérimentaux





Etat retardé et/ou entrée non structurée

Principe, limitation et exemple

- Principale difficulté: Dans le cas d'un système avec état retardé, la condition initiale est une fonction par nature *inconnue* (support $\subset (-\tau, 0)$). Il en est de même lorsque l'entrée est déjà active pour $t \leq 0$.
- Cas particuliers:En l'absence d'effet mémoire pour $t \leq 0$, une démarche analogue aux cas précédents peut être utilisée.

$$\text{Exemple:} \qquad \dot{y} = \delta_\tau * u \tag{1}$$

$$(1) \times (t-\tau) \quad \rightarrow \quad (t-\tau)\dot{y} = \delta_\tau * tu \tag{2}$$

$$(1) * (2) \quad \rightarrow \quad (t-\tau)\dot{y} * u = tu * \dot{y} \tag{3}$$

$$\int (3) \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{\int t\dot{y} * u - \dot{y} * tu}{u * y}$$

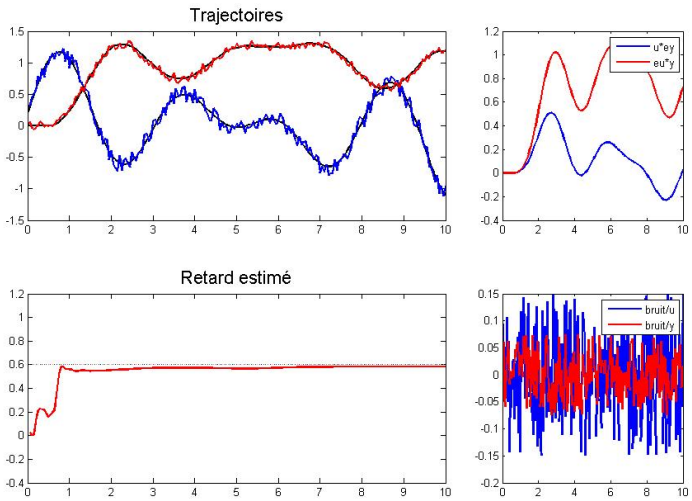
- Produits de convolution entre composantes de la trajectoire mais même structure (formulation spectrale) dans le cas d'une identification simultanée de paramètres et retard.

Etat retardé et/ou entrée non structurée

Retour sur l'approche opérationnelle

Exemple en simulation

(Identification du retard $\tau = 0.6s$ d'un intégrateur)



- Multiplication par des exponentielles amorties pour ne pas amplifier les signaux bruités,
- Elévation au carré avant intégration afin d'éviter des singularités locales.

$$e^{-2\gamma\tau} = \frac{\int_0^t \left[(u * ey)(\theta) + \gamma \int_0^\theta (u * ey)(\nu) d\nu\right]^2 d\theta}{\int_0^t (eu * y)^2(\nu) d\nu}.$$

Etat retardé et/ou entrée non structurée

Cas général

- Le cas général induit une CI de dimension infinie: Par exemple,

$$y = \frac{K\,e^{-\tau s}}{s+a}u \rightarrow \begin{cases} \dot{y} + ay = y_0 + K\delta_\tau * u & \operatorname{supp} u \subset (0,\infty) \\ y_0 = y(0)\delta + u(\theta), & \theta \in (-\tau, 0) \end{cases}$$

- Principe: "annihiler" la CI par des fonctions quasi nulles sur $(-\tau, 0)$.

$$\begin{array}{l} \alpha_{n_1}(t-\tau)(\dot{y}+ay) \approx K\delta_\tau * \alpha_{n_1} u \\ \alpha_{n_2}(t-\tau)(\dot{y}+ay) \approx K\delta_\tau * \alpha_{n_2} u \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{n_1}(t-\tau)(\dot{y}+ay) * \alpha_{n_2} u \\ \approx \alpha_{n_2}(t-\tau)(\dot{y}+ay) * \alpha_{n_1} u. \end{array}$$

- Les polynômes de Tchebychev représentent la meilleure approximation polynomiale de la fonction nulle sur un intervalle $(-\tau, 0)$. $\rightarrow$ Forme générale:

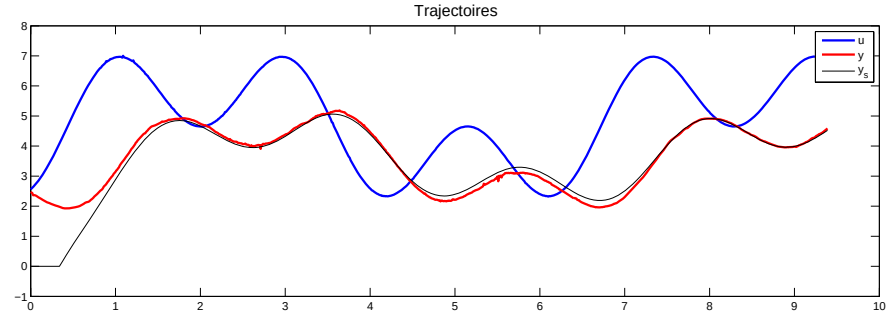
$$\sum_{i=0}^{n_1+n_2} \left[A_i \tau^i\right] \Theta = 0,$$

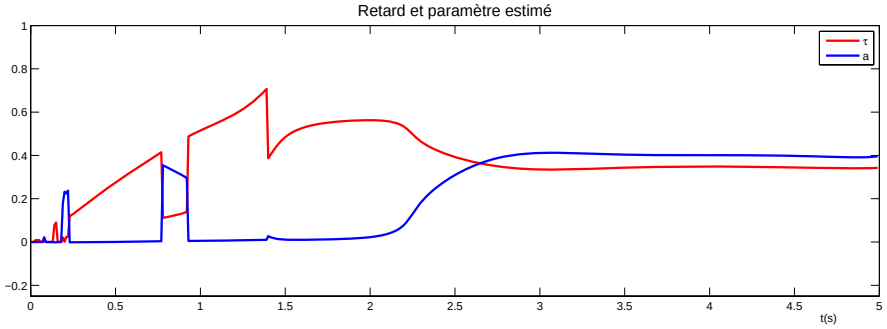
Etat retardé et/ou entrée non structurée

Cas général

avec $$A_i = \begin{pmatrix} H_1 * \xi_i(t,\dot{y},u) & H_1 * \xi_i(t,y,u) \\ H_2 * \xi_i(t,\dot{y},u) & H_2 * \xi_i(t,\dot{y},u) \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix},$$

- Résultats expérimentaux (Feedback)





Conclusion
Verrous scientifiques

- Méthode efficace de sélection en ligne des bons paramètres via une formulation redondante avec A et B $m \times n$, $m > n$:

$$(A(t) - \lambda B(t))\Theta = 0, \tag{4}$$

"(4) has the awkward feature that most matrices have no eigenvalues at all, whilst for those that do, an infinitesimal perturbation will in general remove them[2]".

$\rightarrow$ Notion de pseudo-spectre $\quad \Lambda_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \|(A - \lambda B)\Theta\| \leq \epsilon,\ \|\Theta\| = 1\}.$

- Problématique récente de filtrage au travers d'expressions de la forme:

$$H_k * [\alpha_i \times g_j], \qquad i = 1, 2,\ j = 1, \cdots, n,\ k = 1, \cdots, m.$$

dans lesquelles H_k sont des filtres à déterminer, α_i des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et g_j des termes dépendant des trajectoires du système.

[2] T.G.Wright & al., 01

Conclusion générale

- Principale référence pour le non-linéaire :

  M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, Non-linear estimation is easy, *Int. J. Modelling Identification Control*, à paraître. Accessible en ligne sur `http://hal.inria.fr/inria-00158855`.

  On y trouvera compléments, exemples et références.

- Pourquoi **FACILE** (*easy*) ?

  Concept *naturel* d'observabilité $\Rightarrow$ identifiabilité, déterminabilité que l'on peut expliquer à tout le monde, avec un minimum de culture scientifique.

Essayez d'expliquer l'observabilité selon l'approche habituelle à un scientifique, ignorant tout de l'automatique !

- **Mise en œuvre** : Dérivation numérique (les orateurs sont prêts à accepter d'autres méthodes, différentes de celle esquissée ici !)
- **Ruptures** : Plus de formulation asymptotique, traitement des bruits dans un cadre déterministe (comparer avec l'*analyse par intervalles* (E. Walter et ses collaborateurs)).
- **Applications** : Plusieurs applications en cours de développement (voir, par exemple, l'exposé de H. Mounier, hier).

Autre développement notable : Commande sans modèle.

- Grâce aux techniques rapides d'estimation, on approche le système non linéaire inconnu, par un système très simple, valable uniquement sur une courte fenêtre de temps.
- Déjà deux applications : papillons des moteurs de voitures, systèmes hybrides.

Pour les jeunes chercheurs !

Vous avez assisté ici, à Reims, à de nombreux exposés portant sur l'estimation et l'identification, qui, partant de points de vue variés, voire antagonistes, utilisent des techniques très différentes.

Comment choisir ?

Mettez en doute tout ce que vous entendez, à commencer par ce que je vous raconte ! Travaillez dur pour vous faire votre propre opinion. Il appartient aux cercles dirigeants, par exemple ceux du GDR-MACS, de vous aider dans cette quête.