

Détection de changement en ligne et maintenance conditionnelle

GT Fiabilité- S3

Mitra Fouladirad et Antoine Grall

Université de Technologie de Troyes

31/01/08

Plan

- 1 Système avec un seul mode de dégradation
 - Présentation du modèle
 - Politique de maintenance
 - Coût
- 2 Système avec deux modes de dégradation
 - Paramètres après le changement connus
 - Instant de changement inconnu et déterministe
 - Instant de changement aléatoire
 - Paramètres après le changement inconnus mais statiques
 - Ensemble des paramètres du second mode connu
 - Instant de changement inconnu et déterministe
 - Instant de changement inconnu et aléatoire
 - Paramètres après de changement inconnus et dynamiques

Présentation du modèle

- Système à dégradation graduelle
- X_t l'état (aléatoire) du système à l'instant t
- $X_0 = 0$
- Les accroissements suivent une loi Gamma
 - $X_t - X_s \sim \Gamma(\alpha(t - s), \beta)$
 - α paramètre de forme et β paramètre d'échelle
 - $\mathbb{E}(X_t - X_s) = \alpha\beta(t - s)$, $\text{var}(X_t - X_s) = \alpha\beta^2(t - s)$

Politique

Inspections

- Le système est inspecté en t_i , où $i \in \mathbb{N}$
- $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ est un paramètre fixé
- l'état du système est connu seulement au moment des inspections

Stratégie

- L seuil de maintenance corrective
- A seuil de maintenance préventive
- si $X_t \geq L$ système en panne
- si $X_t \geq A$ action préventive



Coût

A prendre en compte

- Coût de chaque inspection C_i ,
- Coût de chaque action préventive C_p
- Coût de chaque action corrective C_c
- Coût correspondant à la durée d'indisponibilité C_d
- Coût global moyen: $C_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(C(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}(C(T))}{\mathbb{E}(T)}$
 - $C(t) = C_i N_i(t) + C_p N_p(t) + C_c N_c(t) + C_u d_u(t)$.
 - $N_i(t)$ nombre d'inspections avant t ,
 - $N_p(t)$ nombre d'actions préventives avant t ,
 - $N_c(t)$ nombre d'actions correctives avant t ,
 - $d_u(t)$ durée d'indisponibilité avant t ,

Présentation du modèle

- Mode nominal:

$$X_t - X_s : \sim \Gamma(\alpha_1(t - s), \beta_1)$$

- Instant de changement de mode : T_0 inconnu
 - déterministe
 - aléatoire: variable discrète ou continue
- Mode accéléré après T_0 :

$$X_t - X_s \sim \Gamma(\alpha_2(t - s), \beta_2)$$

- $\alpha_2\beta_2 \geq \alpha_1\beta_1$

Politique de maintenance

Sans détection:

- un seul seuil préventif A pour les deux modes, optimal pour le mode nominal.
- intervalle d'inspection Δt , intervalle optimal correspondant au mode nominal.

Prise en compte de la détection:

- Deux seuils préventifs:
 - A_{sup} seuil optimal pour le mode nominal.
 - A_{inf} seuil optimal pour le mode accéléré.
- Intervalle d'inspection unique Δt , optimal pour le mode nominal.

Politique de maintenance avec détection

Instant de détection t_{detect} :

- si $X_{t_{\text{detect}}} < A_{\text{inf}}$ le système reste inchangé
 - un remplacement à l'instant $t_n > t_{\text{detect}}$ tel que $X_{t_{n-1}} < A_{\text{inf}} \leq X_{t_n}$.
- si $X_{t_{\text{detect}}} \geq A_{\text{inf}}$ le système est immédiatement remplacé.

Notons

- $Y_t = X_{t+\Delta t} - X_t$
- $Y_t \sim \Gamma(\alpha_1 \Delta t, \beta_1)$ si $T_0 \geq t + \Delta t$
- $Y_t \sim \Gamma(\alpha_2 \Delta t, \beta_2)$ si $T_0 \leq t + \Delta t$

Schéma illustratif

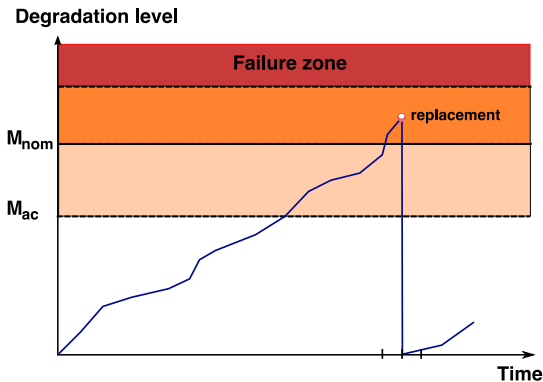


Figure: Remplacement dans le mode 1

Schéma illustratif

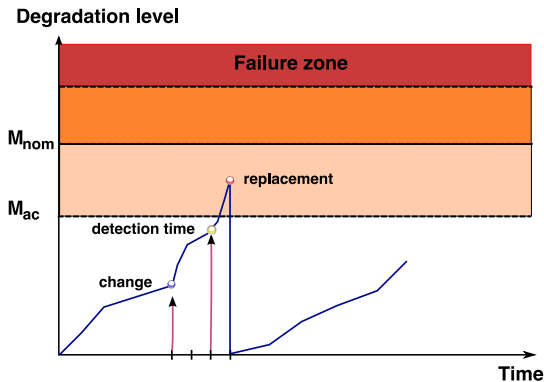


Figure: Détection et ensuite remplacement dans le mode 2

Schéma illustratif

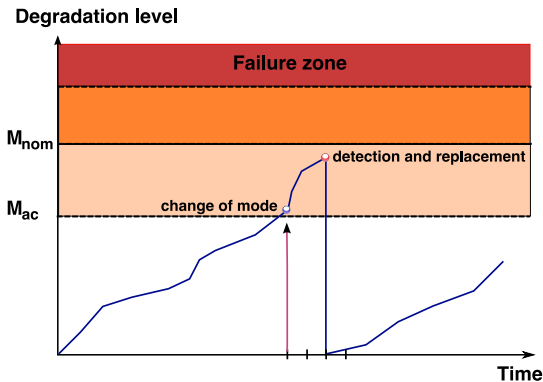


Figure: Détection et remplacement immédiate dans le mode 2

Méthode de détection

- La règle d'arrêt CUSUM proposée par Page 1954:

$$N^* = \min \left\{ n \geq 1, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{t=k}^n \log \frac{f_{(\alpha_2 \Delta t, \beta_2)}(Y_t)}{f_{(\alpha_1 \Delta t, \beta_1)}(Y_t)} \geq h \right\}$$

- la constante h est choisie telle que $\Pr_0(N^* < \infty) \leq a$
- Lorden 1971 a démontré que CUSUM minimise le délai moyen à la détection dans le pire cas:

$$\tau = \sup_{T_0 \geq 1} \text{esssup} \mathbb{E} (N - T_0 + 1 | N \geq T_0, Y_1, \dots, Y_{T_0})$$

Propriétés de la règle d'arrêt

- Délai de CUSUM: $\tau^* = \min_N \tau \simeq \frac{|\log a|}{d_{1,2}}$ lorsque $a \rightarrow 0$.
 - $d_{1,2}$: la distance de Kullback-Liebler entre $f_{(\alpha_2 \Delta t, \beta_2)}$ et $f_{(\alpha_1 \Delta t, \beta_1)}$.
- τ^* est une fonction décroissante de $d_{1,2}$.
- τ^* est une fonction décroissante de la moyenne et variance du second mode.

Comparaison

Mode nominal: $\alpha_1 = 1$ $\beta_1 = 1$, $a = 10^{-6}$, $A_{\text{sup}} = 90.2$

case	α_2	β_2	A_{inf}	$\tau \Delta t$
1	2	1	85.6	41.57
2	1	3	74.6	15.32
3	2	2	73.7	8.42
4	1	7	51.6	3.41

Table: Caractéristiques du second mode.

case	détection instantanée	détection avec délai	un seuil unique (A_{sup})
1	1.96	1.98	1.97
2	2.08	2.14	2.21
3	2.13	2.22	2.36
4	2.28	2.37	2.66

Table: Comparaison du coût des trois configurations.

Instant de changement aléatoire

Politique de maintenance:

- Politique de maintenance et détection hors ligne
 - utilisation de la quantile $\bar{T}$ de T_0 correspondant à la valeur fixée p :

$$\Pr(T_0 \leq \bar{T}) = p.$$

- Politique de maintenance et détection en ligne
 - Méthode de détection bayésienne

Politique de maintenance et détection hors-ligne

- Changement de seuil préventif à $t_i = \bar{T}$
- Si $X_{t_i} \geq L$ le système est en panne
⇒ remplacement correctif
- Si $t_i < \bar{T}$ et $X_{t_i} \geq A_{\text{sup}}$
⇒ remplacement préventif
Le système est en mode nominal mais ne fonctionne pas correctement
- Si $t_i \geq \bar{T}$ et si $X_{t_i} \geq A_{\text{inf}}$
⇒ remplacement préventif
- Dans les autres cas la décision est portée à l'instant t_{i+1} .

Politique de maintenance et détection en-ligne

- La règle d'arrêt est similaire à CUSUM

$$N^* = \min \left\{ n \geq 1, \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{t=k}^n \log \frac{f_{(\alpha_2 \Delta t, \beta_2)}(Y_t)}{f_{(\alpha_1 \Delta t, \beta_1)}(Y_t)} \geq h \right\}.$$

- Si T_0 est une v.a discrète de loi a priori π_0 , h satisfait $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_0(k) \Pr_1(N^* < k) \leq a$.
- Si T_0 est une v.a continue de loi a priori π_0 , h satisfait $\int_0^{\infty} \pi_0(k) \Pr_1(N^* < k) dk \leq a$.
- après N^* le seuil préventif A_{sup} est remplacé par A_{inf} .

Optimisation

★ Critère: Minimiser le coût global

Paramètres d'optimisation:

- Mode nominal: le seuil préventif A_{sup} , l'intervalle d'inspection Δt
- Mode accéléré: le seuil préventif A_{inf}
- paramètres de détection
 - la probabilité p en détection hors ligne
 - seuil h en détection en-ligne

Résultats numériques

$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, A_{\text{sup}} = 90.2, C_i = 5, C_p = 50, C_c = 100$ et
 $C_u = 250$

case	α_2	β_2	A_{inf}
1	2	1	85.6
2	1	3	74.6
3	2	2	73.7
4	1	7	51.6

Table: Caractéristiques du second mode.

Résultats numériques

case	$\mathcal{U}(0, 100)$	$\mathcal{P}(50)$	$\mathcal{E}(1/50)$
1	1.97	1.96	2.00
2	2.11	2.08	2.15
3	2.15	2.11	2.21
4	2.32	2.25	2.41

Table: Coût optimal correspondant à la maintenance avec détection en-ligne.

case	$\mathcal{U}(0, 100)$	$\mathcal{P}(50)$	$\mathcal{E}(1/50)$
1	1.97	1.96	2.01
2	2.11	2.07	2.15
3	2.15	2.11	2.25
4	2.44	2.27	2.6

Table: Coût optimal correspondant à la maintenance avec détection hors-ligne.

case	1	2	3	4
coût	1.97	2.21	2.36	2.66

Table: Coût optimal correspondant à la maintenance avec un seuil

Optimisation et détection en-ligne

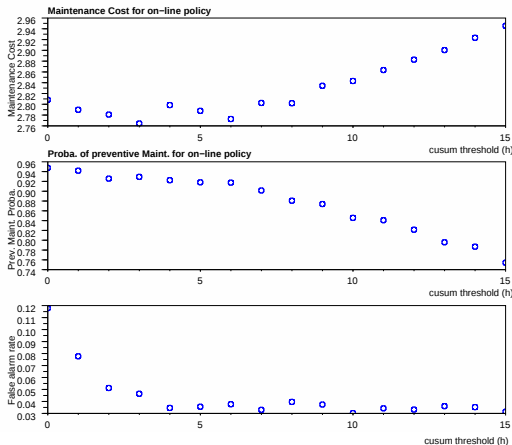


Figure: Politique de maintenance en-ligne pour $T_0 \sim \mathcal{E}(30)$.

Optimisation et détection hors-ligne

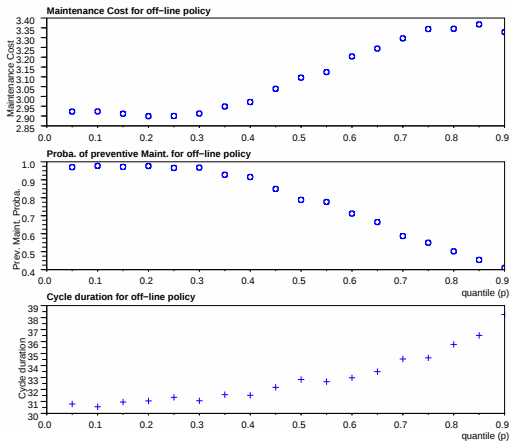


Figure: Politique de maintenance hors-ligne pour $T_0 \sim \mathcal{E}(30)$.

Paramètres inconnus après le changement mais ensemble des paramètres connu

- Les paramètres après changement inconnus

$$(\alpha_2, \beta_2) \in \{(\alpha_{21}, \beta_{21}), \dots, (\alpha_{2K}, \beta_{2K})\} \quad (1)$$

- Politique de maintenance:
 - Détecter le changement
 - Isoler le second mode de dégradation
 - Adapter le seuil préventif à ces paramètres
 - Optimiser le coût de maintenance

- Soit $N^{\nu=j} = \inf_{k \geq 1} \{N(k) : \nu(k) = j\}$ où $\nu(k) \in \{1, \dots, K\}$ est la décision prise à l'instant k
- Délai moyen avant la première fausse alarme de type j : $\mathbb{E}_0(N^{\nu=j})$
- Délai moyen avant la première fausse isolation de type j : $\mathbb{E}_{T_0}^l(N^{\nu=j}), l \neq j$
- But: minimiser la durée moyenne de détection/isolation dans le pire cas

$$\bar{\tau}^* = \max_{1 \leq l \leq K} \bar{\tau}_l^*,$$

$$\bar{\tau}_l^* = \sup_{T_0 \geq 1} \text{esssup} \bar{\tau}_l,$$

$$\bar{\tau}_l = E_{T_0}^l(\bar{N} - T_0 + 1 | N \geq t_0, X_1, \dots, X_{T_0-1}).$$

pour la valeur minimale fixée:

$$\min_{0 \leq i \leq K} \min_{1 \leq j \neq i \leq K} \mathbb{E}_i(N^{\nu=j}) = a$$

Algorithme de détection/isolation

- $N^{l*} = \inf_{k \geq 1} N^{l*}(k),$
 $N^{l*}(k) = \inf \{ t \geq k, \min_{0 \leq j \neq l \leq K} S_k^t(l, j) \geq h \}$ où
 $S_k^t(l, j) = \sum_{i=k}^t \log \frac{f_l(Y_i)}{f_j(Y_i)},$
- $f_l(.) = f_{\alpha_{2l}, \beta_{2l}}(.)$ pour $l = 1, \dots, K$ et $f_0(.) = f_{\alpha_1, \beta_1}(.)$.

$$N^* = \min \{ N^{1*}, \dots, N^{K*} \}$$

$$\nu^* = \operatorname{argmin} \{ N^{1*}, \dots, N^{K*} \}$$

$$\bar{\tau}^* \leq \max_{1 \leq l \leq K} \mathbb{E}_l(N^*) \sim \frac{\ln(a)}{\rho^*} \text{ quand } a \rightarrow \infty$$

$$\rho^* = \min_{1 \leq l \leq K} \min_{0 \leq j \neq l \leq K} \rho_{lj}$$



Optimisation

Optimisation selon différents critères

- minimiser le coût de maintenance
- maximiser le taux d'isolation correcte

Optimisation

Les vrais paramètres du second mode	1	2	3	4
Coût de Maintenance	1.96	1.96	1.96	1.97
Seuil de détection	31.5	3.5	2	2
Taux de fausse alarme	0.57	0.93	0.931	0.92
Taux d'isolation du mode 1	0.98	1	1	1

Table: La politique de maintenance optimale correspondant au coût de maintenance minimal.

Optimisation

Les vrais paramètres du second mode	1	2	3	4
Coût de maintenance	1.96	2.10	2.17	2.42
Seuil de détection	31.5	8.5	7	14
Taux de fausse alarme	0.57	0.922	0.901	0.933
Taux d'isolation correcte	1	1	1	1

Table: La politique de maintenance optimale correspondant au taux d'isolation correcte maximal.

Optimisation et détection/isolation

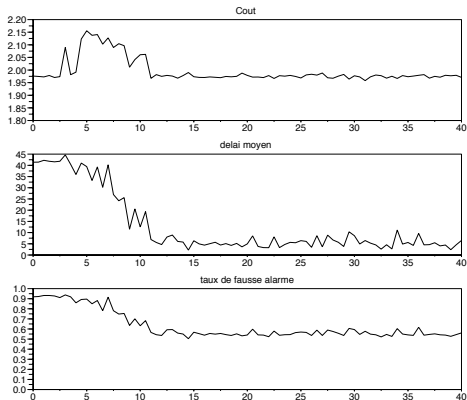


Figure: Propriétés de la politique maintenance quand $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 7$

Paramètres après changement inconnus

- les paramètres α_2 et β_2 inconnus
- même politique de maintenance avec une règle de détection en-ligne adéquate
 - instant de changement T_0 déterministe
 - instant de changement T_0 aléatoire
- estimation des paramètres dans le cadre de la méthode de détection
 - méthode de maximum de vraisemblance
 - méthode de vraisemblance pondérée
- grande complexité de calcul $\Rightarrow$ utilisation d'une fenêtre glissante

Algorithme de détection

Utilisation de la méthode de maximum de vraisemblance:

- $S_k^t = \sum_{i=k}^t \log \frac{f_{\theta_2}(Y_i)}{f_{\theta_1}(Y_i)}$, où $\theta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ pour $i = 1, 2$.

$$\hat{T} = \inf \{t \geq m_a : \max_{t-m_a \leq k < t-m'_a} \sup_{\theta_2 \in \Theta} S_k^t \geq h\};$$

- ensemble des paramètres Θ compact

- taux de fausse alarme

$$\sup_{k \geq 1} \Pr_0(k - m_a \leq \hat{T} \leq k - m'_a) \leq a,$$

- $\liminf_{a \rightarrow 0} \frac{m_a}{|\log a|} > \rho_{10}^{-1}$ où $\log m_a = o(\log a)$,

$$m'_a = o(|\log a|) \text{ lorsque } a \rightarrow 0$$

Algorithme de détection

Utilisation de la méthode de vraisemblance pondérée:

- Soit $\Lambda_k^t = \int_{\Theta} \prod_{i=k}^t \frac{f_{\alpha_2, \beta_2}(Y_i)}{f_{\alpha_1, \beta_1}(Y_i)} dG(\theta)$,
- $G(\theta)$ est la loi a priori de $\theta = (\alpha_2, \beta_2)$ sur Θ .
- $\liminf \frac{m_a}{|\log a|} > \rho_{10}^{-1}$ où $\log m_a = o(\log a)$ lorsque $a \rightarrow 0$,
- La règle d'arrêt est définie par

$$\tilde{T} = \inf\{t \geq 1 : \max_{t-m_a \leq k < t} \Lambda_k^t \geq e^h\};$$

- h est défini tel que $\sup_{k \geq 1} \Pr_0(k \leq \tilde{T} \leq k + m_a) \leq a$.

Seuil préventif du second mode

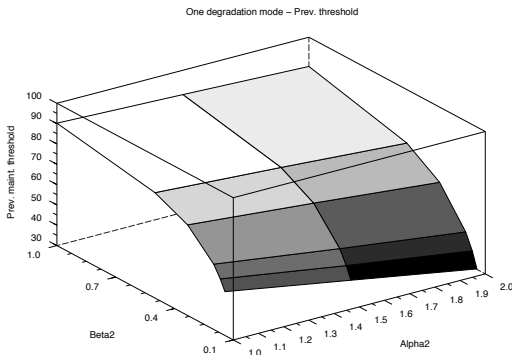


Figure: Seuil optimal correspondant aux différentes valeurs des paramètres du second mode

Comparaison des politiques

cas	Maximum de vraisemblance	La vraisemblance pondérée	un seul seuil
1	1.97	1.97	1.97
2	2.14	2.18	2.21
3	2.19	2.32	2.36
4	2.41	2.58	2.66

Table: Coût de maintenance optimal avec changement de mode non aléatoire.

Instant de changement inconnu et aléatoire:

- Application des politiques de maintenance en-ligne en prenant en compte la loi a priori
- Si T_0 v.a continue, le taux de fausse alarme est défini par

$$\int_0^{\infty} \pi(k) \sup_{k \geq 1} \Pr_0(k \leq T \leq k + m_a) dk \leq a,$$

- Si T_0 v.a discrète, le taux de fausse alarme est défini par $\sum_{k=1}^{\infty} \pi(k) \sup_{k \geq 1} \Pr_0(k \leq T \leq k + m) \leq a.$

Politique de maintenance:

- Application des politiques de maintenance en-ligne
- Optimisation des paramètres de maintenance et de détection

Comparaison:

- Comparaison du coût des deux méthodes de détection (EMV ou MVP)
- Comparaison des deux configurations T_0 aléatoire ou déterministe.

Optimisation

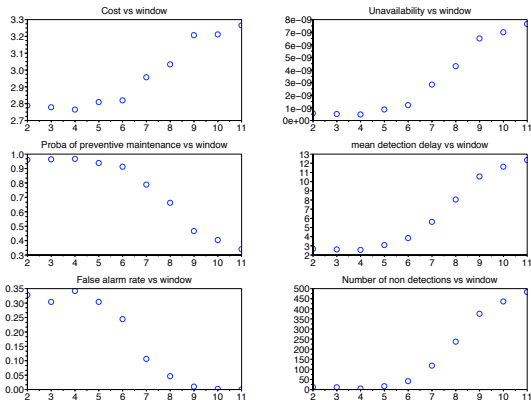


Figure: méthode MV quand $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 2$ avec une loi de poisson a priori

Comparaison des politiques

cas	Maximum de vraisemblance	La vraisemblance pondérée	un seul seuil
1	1.96	1.97	1.97
2	2.13	2.20	2.21
3	2.17	2.35	2.36
4	2.34	2.64	2.66

Table: Coût de maintenance minimal en utilisant une détection en ligne et $T_0 \sim \mathcal{P}(50)$.

cas	Maximum de vraisemblance	La vraisemblance pondérée	un seul seuil
1	2.05	2.01	1.97
2	2.19	2.24	2.21
3	2.24	2.35	2.36
4	2.52	2.64	2.66

Table: Coût de maintenance minimal en utilisant une détection en ligne et $T_0 \sim \mathcal{E}(1/50)$.

Présentation générale du modèle:

- couple aléatoire $(X_i, T_i)_{i=1}^n$
- X_t désigne la variable X sachant $T = t$
- $f_{X|T}(x, t) := g(x; \theta_2(t))$
- $\psi(x; s) = \frac{\partial}{\partial s} \log g(x; s)$
- $\theta_2(\cdot)$ continue (pour traiter le biais de l'estimateur, des hypothèses de régularité plus fortes)
- $\tilde{\Theta} := \{\theta_2(t) : \theta_2 \in \Theta, t \in J\}$ compact, $t \in J$ intervalle fermé de $\mathbb{R}$,
- Méthode de maximum de vraisemblance local:

$$\hat{\theta}_{2,k}(t) := \arg \max_{s \in \tilde{\Theta}} \sum_{i=k}^n \log g(X_i; s) K\left(\frac{t - T_i}{h_n}\right).$$

- Temps d'arrêt

$$N^* = \min_{n \geq 1} \left\{ \max_{n-m_a \leq k \leq n-m'_a} \sup_{\theta_2 \in \tilde{\Theta}} \sum_{t=k}^n \log \frac{f_{\theta_2(t)}(Y_t)}{f_{\theta_1}(Y_t)} \geq c_a \right\},$$

- Application en maintenance

- Estimation des paramètres α_t et β_t s'obtient en appliquant les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (1, 0)^T$ et $\mathbf{u}_2 = (0, 1)^T$ à l'estimateur $\hat{\theta}_2(t)$
- Politique de maintenance similaire au cas des paramètres statiques
- Application numérique et estimation par la méthode Bootstrap



Merci de votre attention