
Estimation d'état et diagnostic de systèmes décrits par un multimodèle

José RAGOT et Didier MAQUIN

Institut National Polytechnique de Lorraine

**Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 CNRS – UHP – INPL**

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

- Constat : très nombreuses méthodes s'appuyant sur des modèles linéaires

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

- Constat : très nombreuses méthodes s'appuyant sur des modèles linéaires
- Idée : essayer de transposer ces méthodes au cas de modèles non linéaires

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

- Constat : très nombreuses méthodes s'appuyant sur des modèles linéaires
- Idée : essayer de transposer ces méthodes au cas de modèles non linéaires (au moindre effort !)

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

- Constat : très nombreuses méthodes s'appuyant sur des modèles linéaires
- Idée : essayer de transposer ces méthodes au cas de modèles non linéaires (au moindre effort !)
- Solution : utiliser un modèle non linéaire construit sur la base de modèles linéaires

Elaboration d'outils pour la surveillance des systèmes non linéaires

- Constat : très nombreuses méthodes s'appuyant sur des modèles linéaires
- Idée : essayer de transposer ces méthodes au cas de modèles non linéaires (au moindre effort !)
- Solution : utiliser un modèle non linéaire construit sur la base de modèles linéaires

Notion de multi-modèle

Multi-modèle?

Notion d'un multi-modèle

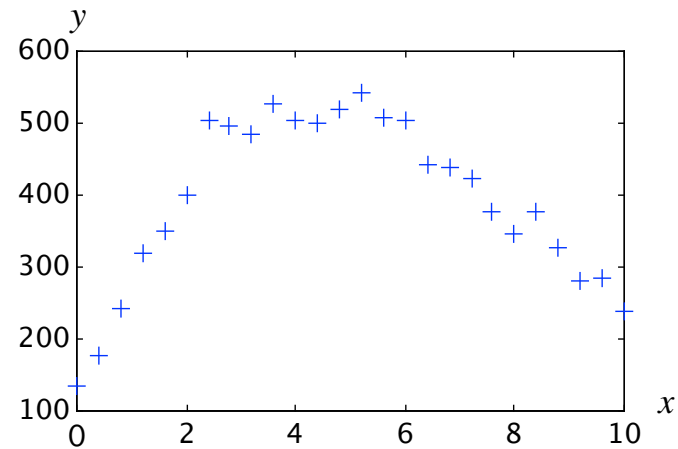
Notion d'un multi-modèle

- description “locale” à l'aide de modèles simples

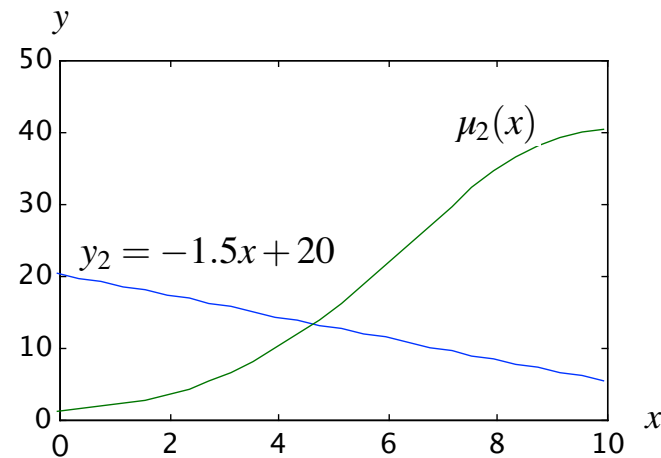
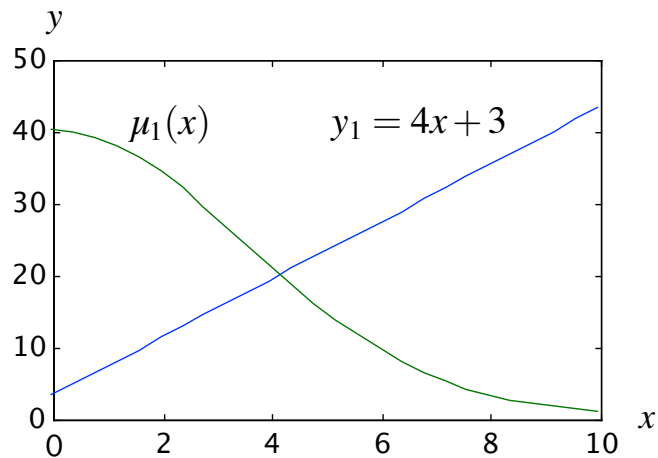
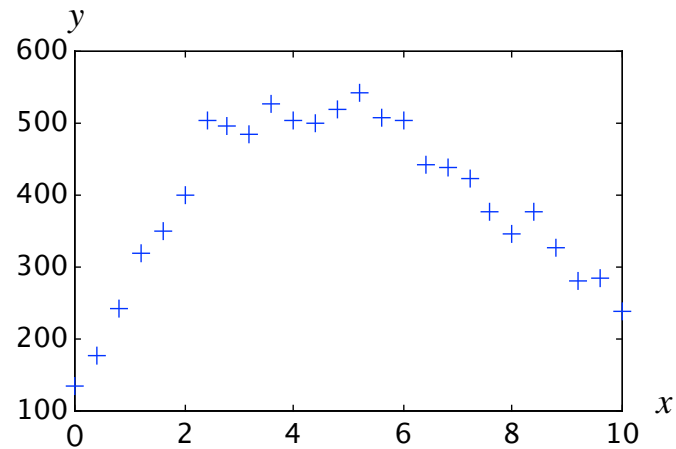
Notion d'un multi-modèle

- description “locale” à l'aide de modèles simples
- interpolation de ces modèles locaux

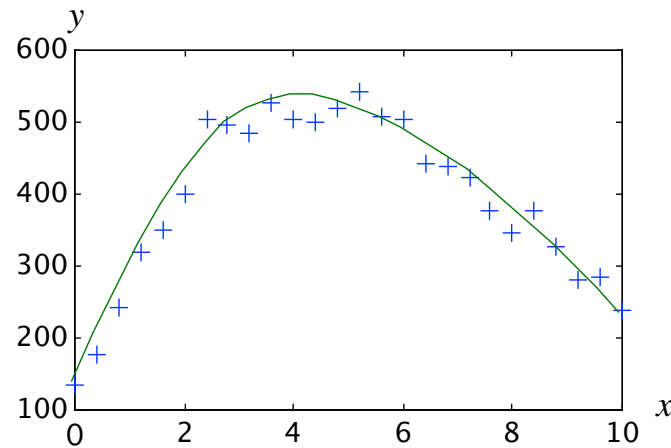
Notion de multi-modèle – cas statique



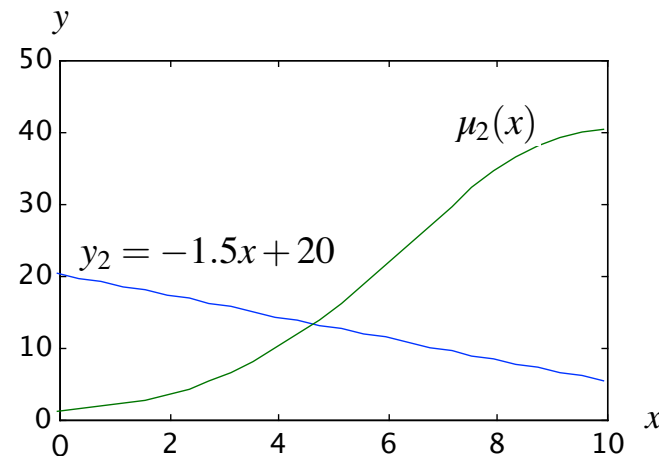
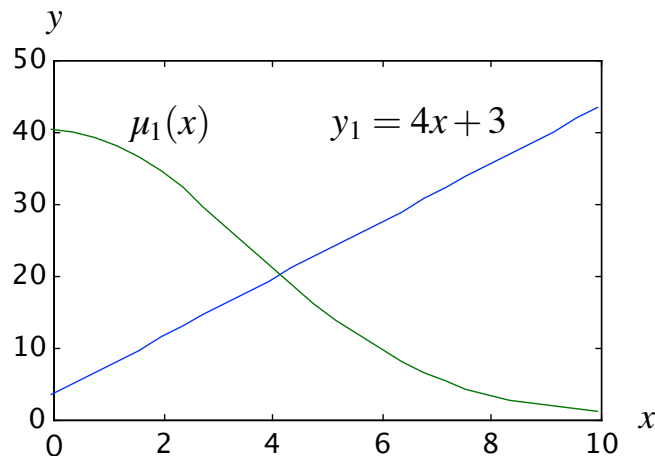
Notion de multi-modèle – cas statique



Notion de multi-modèle – cas statique



$$y = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}$$



Notion de multi-modèle – cas dynamique

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à états locaux découplés

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à états locaux découplés

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, M$$

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à états locaux découplés

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, M$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) y_i(t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \xi(t) = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{cases}$$

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à état unique

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à état unique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{array} \right.$$

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à état unique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{array} \right.$$

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à état unique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{array} \right.$$

⇒ **Modèle flou de Takagi-Sugeno**

Notion de multi-modèle – cas dynamique

Modèle à état unique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) = C x(t) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = \{u(t), x(t), y(t)\} \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{array} \right.$$

⇒ **Modèle flou de Takagi-Sugeno**

- Propriété d'*approximateur universel*

- Propriété d'*approximateur universel*
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL

- Propriété d'*approximateur universel*
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL
- \Rightarrow estimation d'état, observateur, ...

- Propriété d'*approximateur universel*
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) aux systèmes NL
- \Rightarrow estimation d'état, observateur, ...
- Absence d'analyse spécifique de la nature des non-linéarités

Estimation d'état...

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Dynamique erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - G_i C) e(t)$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Dynamique erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) (A_i - G_i C) e(t)$$

Analyse de convergence de l'erreur - Lyapunov

$$V(t) = e(t)^T P e(t)$$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Conditions de stabilité asymptotique

$$(A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) < 0, \quad i = 1, \dots, M$$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Conditions de stabilité asymptotique

$$(A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) < 0, \quad i = 1, \dots, M$$

Equations matricielles bilinéaires

⇒ changements de variables : $W_i = P G_i$

résolution en W_i et P

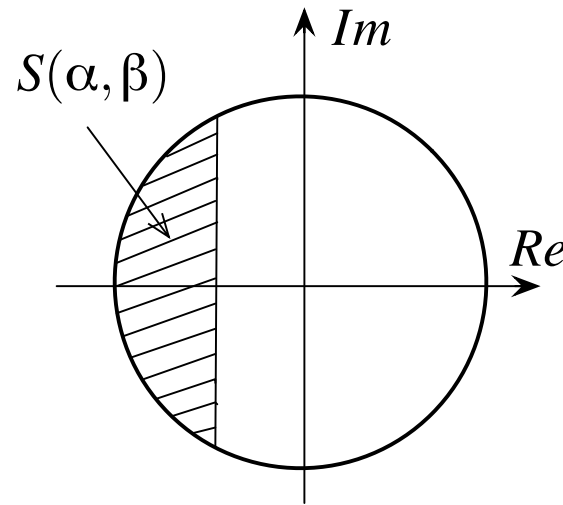
déduction des gains : $G_i = P^{-1} W_i$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Affectation des valeurs propres



Elaboration d'un multiobservateur (2)

Description de la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t))) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Affectation des valeurs propres

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -\beta P & (A_i - G_i C)^T P \\ P(A_i - G_i C) & -\beta P \end{pmatrix} < 0 \\ (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) + 2\alpha P < 0 \end{cases}$$

... et diagnostic.

(observateur à entrées inconnues)

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t)$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Observateur à entrées inconnues

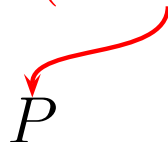
$$\begin{cases} z(t+1) = Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t) = (I + EC)x(t) - z(t)$$

P



Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t + 1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + \\ (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t + 1)$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t + 1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t + 1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t + 1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t + 1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

$$PR - KF = 0$$

$$EF = 0$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

$$PR - KF = 0$$

$$EF = 0$$

Convergence asymptotique

N stable

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Dynamique de l'erreur d'estimation d'état

$$e(t+1) = Ne(t) + (PA - NP - LC)x(t) + (PB - G)u(t) + (PR - KF)\bar{u}(t) + EF\bar{u}(t+1)$$

Condition d'autonomie

$$PA - NP - LC = 0$$

$$PB - G = 0$$

$$PR - KF = 0$$

$$EF = 0$$

Convergence asymptotique

N stable

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} z(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

Erreur d'estimation d'état

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

$$e(t + 1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t)$$

Elaboration d'un multiobservateur (2)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

$$e(t + 1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i e(t)$$

si

$$\left\{ \begin{array}{l} P = I + EC \\ N_i P = P A_i - L_i C \\ K_i = N_i E + L_i \\ P R_i = K_i F \\ G_i = P B_i \\ EF = 0 \end{array} \right.$$

et

$$N = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) N_i \quad \text{stable}$$

Elaboration d'un multiobservateur (3)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

Paires (A_i, C) observables, F de plein rang colonne et $\forall i, \in \{1, \dots, M\}$:

$$\begin{aligned}N_i^T X N_i - X &< 0 \\N_i &= P A_i - K_i C \\P &= I + E C \\P R_i &= K_i F \\E F &= 0 \\L_i &= K_i - N_i E \\G_i &= P B_i\end{aligned}$$

où $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive.

Elaboration d'un multiobservateur (3)

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

Paires (A_i, C) observables, F de plein rang colonne et $\forall i, \in \{1, \dots, M\}$:

$$N_i^T X N_i - X < 0$$

$$N_i = P A_i - K_i C$$

$$P = I + E C$$

$$P R_i = K_i F$$

$$E F = 0$$

$$L_i = K_i - N_i E$$

$$G_i = P B_i$$

où $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et définie positive.

Systeme

$$N_i^T X N_i - X < 0$$

$$N_i = P A_i - K_i C$$

$$P = I + E C$$


$$P R_i = K_i F$$

$$E F = 0$$

Systeme

$$\begin{aligned}N_i^T X N_i - X &< 0 \\N_i &= P A_i - K_i C \\P &= I + E C \\P R_i &= K_i F \\E F &= 0\end{aligned}$$

Résolution


$$E = I - F F^-$$

F^- inverse généralisée de F

Systeme

$$N_i^T X N_i - X < 0$$

$$N_i = P A_i - K_i C$$

$$P = I + E C$$

$$P R_i = K_i F$$

$$E F = 0$$

Systeme

$$\begin{aligned} N_i^T X N_i - X &< 0 \\ N_i &= P A_i - K_i C \\ P &= I + E C \\ P R_i &= K_i F \\ E F &= 0 \end{aligned}$$

Résolution

$$\begin{aligned} N_i^T X N_i - X &= (P A_i - K_i C)^T X (P A_i - K_i C) - X < 0 \\ P R_i &= K_i F \end{aligned}$$

Inégalités matricielles bilinéaires en K_i et X sous contraintes égalité.

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_iC)^T X (PA_i - K_iC) - X < 0 \\ PR_i = K_iF \end{cases}$$

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i C)^T X (PA_i - K_i C) - X < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = X K_i$$

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i C)^T X (PA_i - K_i C) - X < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = X K_i$$

Complément de Schur

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X & A_i^T P X - C^T W_i^T \\ X P A_i - W_i C & X \end{pmatrix} > 0 \\ X P R_i = W_i F \end{cases}$$

Inégalités matricielles

$$\begin{cases} (PA_i - K_i C)^T X (PA_i - K_i C) - X < 0 \\ PR_i = K_i F \end{cases}$$

Changement de variable

$$W_i = X K_i$$

Complément de Schur

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X & A_i^T P X - C^T W_i^T \\ X P A_i - W_i C & X \end{pmatrix} > 0 \\ X P R_i = W_i F \end{cases}$$

Inégalités matricielles **linéaires** en X et W_i

Systeme

$$\begin{aligned}N_i^T X N_i - X &< 0 \\N_i &= P A_i - K_i C \\P &= I + E C \\P R_i &= K_i F \\E F &= 0 \\L_i &= K_i - N_i E \\G_i &= P B_i\end{aligned}$$

Système

$$\begin{aligned}N_i^T X N_i - X &< 0 \\N_i &= P A_i - K_i C \\P &= I + E C \\P R_i &= K_i F \\E F &= 0 \\L_i &= K_i - N_i E \\G_i &= P B_i\end{aligned}$$

Séquence de résolution

$$E \longrightarrow P \longrightarrow G_i \text{ et } (X, W_i) \longrightarrow K_i = X^{-1} W_i \longrightarrow N_i \longrightarrow L_i$$

Modèle du système

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (1)

Modèle du système

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + F\hat{\bar{u}}(t) \end{cases}$$

où $\hat{\bar{u}}(t)$ est une estimation de l'entrée inconnue $\bar{u}(t)$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{u}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + F \hat{u}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues

$$\hat{u}(t) = (W^T W)^{-1} W^T \begin{pmatrix} \hat{x}(t+1) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) \\ y(t) - C \hat{x}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } W = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \\ F \end{pmatrix}$$

... et diagnostic **bis**.

(observateur à mode glissant)

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \|\bar{u}(t)\| \leq \rho$$

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \|\bar{u}(t)\| \leq \rho$$

Walcott et Zak (1986)

Rappel succinct du cas linéaire (1)

Modèle dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + R\bar{u}(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \|\bar{u}(t)\| \leq \rho$$

Walcott et Zak (1986)

- G telle que $(A - GC)$ a des valeurs propres stables
- (P, Q) matrices de Lyapunov symétriques et définies positives
- F respectant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} (A - GC)^T P + P(A - GC) < -Q \\ C^T F^T = PR \end{cases}$$

Observateur de Walcott et Zak

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + \nu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Observateur de Walcott et Zak

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + \nu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \nu(t) = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T FC}{\|FCe(t)\|} e(t) & \text{si } FCe(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \end{cases}$$

Rappel succinct du cas linéaire (2)

Observateur de Walcott et Zak

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - G(C\hat{x}(t) - y(t)) + \nu(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \nu(t) = \begin{cases} -\rho \frac{P^{-1}C^T F^T FC}{\|FCe(t)\|} e(t) & \text{si } FCe(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \end{cases}$$

Multimodèle à entrée inconnue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad \text{avec } \|\bar{u}(t)\| \leq \rho$$

Multimodèle à entrée inconnue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad \text{avec } \|\bar{u}(t)\| \leq \rho$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t)) + R_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Multiobservateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t)) + R_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Elaboration d'un multiobservateur (1)

Multiobservateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i (y - C \hat{x}(t)) + R_i \nu_i(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Convergence asymptotique de l'erreur d'estimation

$$\begin{cases} (A_i - G_i C)^T P + P(A_i - G_i C) < 0 \\ C^T F_i^T = P R_i \\ \nu_i(t) = \begin{cases} \rho \frac{F_i e_y(t)}{\|F_i e_y(t)\|} & \text{si } e_y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Modèle du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (1)

Modèle du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases}$$

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{\bar{u}}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

où $\hat{\bar{u}}(t)$ est une estimation de l'entrée inconnue $\bar{u}(t)$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Modèle en l'absence d'entrées inconnues

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \bar{x}(t) + B_i u(t)) \\ \bar{y}(t) = C \bar{x}(t) \end{cases}$$

Estimation des entrées inconnues (2)

Modèle appliqué aux estimations des signaux

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + R_i \hat{u}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases}$$

Modèle en l'absence d'entrées inconnues

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i \bar{x}(t) + B_i u(t)) \\ \bar{y}(t) = C \bar{x}(t) \end{cases}$$

Erreur entre les deux états

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) + R_i \hat{u}(t))$$

Estimation des entrées inconnues (3)

Erreur entre les deux états

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) + R_i \hat{u}(t))$$

Estimation des entrées inconnues (3)

Erreur entre les deux états

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) + R_i \hat{u}(t))$$

Estimation des entrées inconnues

$$\hat{u}(t) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^{-1} \left(\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t))) \right)$$

Estimation des entrées inconnues (3)

Erreur entre les deux états

$$\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) + R_i \hat{u}(t))$$

Estimation des entrées inconnues

$$\hat{u}(t) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) R_i \right)^{-} \left(\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t) - \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i (\hat{x}(t) - \bar{x}(t))) \right)$$

La notation $(\cdot)^{-}$ désigne une inverse généralisée

Application 1

(turbo-réacteur d'avion)

Modèle initial (pseudo-analytique)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = K_1(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_2(x_1)(u - u_R(x_1)) \\ \dot{x}_2 = K_3(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_4(x_1)(u - u_R(x_1)) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = K_5(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_6(x_1)(u - u_R(x_1)) + y_{3R}(x_1) \\ y_4 = K_7(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_8(x_1)(u - u_R(x_1)) + y_{4R}(x_1) \end{array} \right.$$

Modèle initial (pseudo-analytique)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = K_1(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_2(x_1)(u - u_R(x_1)) \\ \dot{x}_2 = K_3(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_4(x_1)(u - u_R(x_1)) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = K_5(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_6(x_1)(u - u_R(x_1)) + y_{3R}(x_1) \\ y_4 = K_7(x_1)(x_2 - y_{2r}(x_1)) + K_8(x_1)(u - u_R(x_1)) + y_{4R}(x_1) \end{array} \right.$$

x_1 : régime compresseur basse pression (en %)

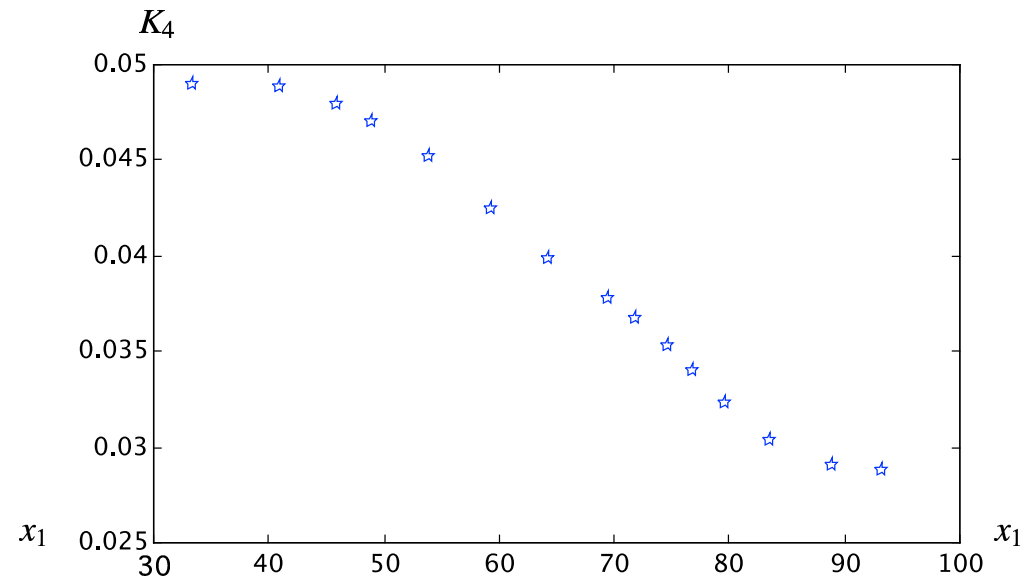
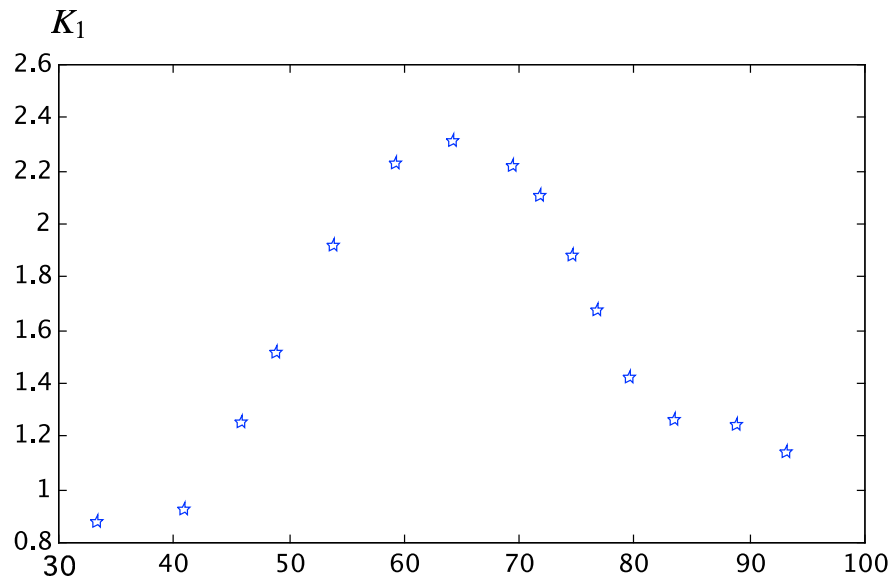
x_2 : régime compresseur haute pression (en %)

y_3 : pression statique sortie compresseur (en Bar)

y_4 : température chambre de combustion (en °K)

u : débit carburant (en kg/s)

Exemples d'allures de gains



Elaboration du multimodèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{array} \right.$$

Elaboration du multimodèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{array} \right.$$

Observabilité

Systeme observable à l'aide de l'entrée et d'une sortie quelconque

Elaboration du multimodèle

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(u(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{cases}$$

Observabilité

Systeme observable à l'aide de l'entrée et d'une sortie quelconque

Banc d'observateur - défauts capteurs

Elaboration de 15 observateurs différents (structure GOS)

Elaboration du multimodèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{array} \right.$$

Elaboration du multimodèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{array} \right.$$

Observateur à entrée inconnue

Estimation de l'entrée inconnue

Elaboration du multimodèle

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(A_i x_m(t) + B_i u(t) + D_i) \\ y_m(t) = \sum_{i=1}^3 \mu_i(y_{m.1}(t))(C_i x(t) + E_i u(t) + N_i) \end{array} \right.$$

Observateur à entrée inconnue

Estimation de l'entrée inconnue

Résultats

Médiocres pour l'application concernée

Utilisable pour des systèmes à plusieurs entrées

Application 2

(transmission sûre)

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \xi(t) = y(t) \\ \mu_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\xi(t))) \\ \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)) \end{cases}$$

Multimodèle

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + R_i \bar{u}(t)) \\ y(t) = Cx(t) + F\bar{u}(t) \end{cases}$$

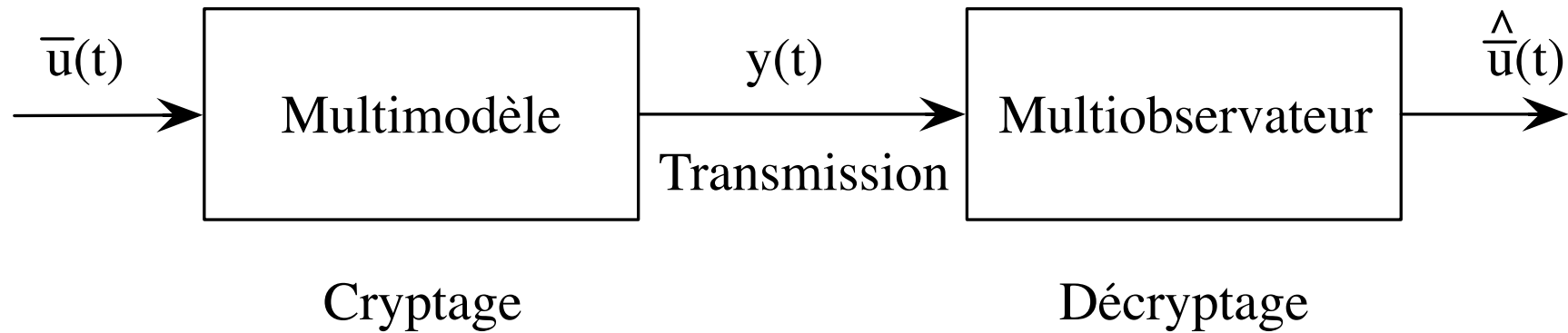
avec

$$\begin{cases} \xi(t) = y(t) \\ \mu_1(\xi(t)) = \frac{1}{2}(1 - \tanh(\xi(t))) \\ \mu_2(\xi(t)) = 1 - \mu_1(\xi(t)) \end{cases}$$

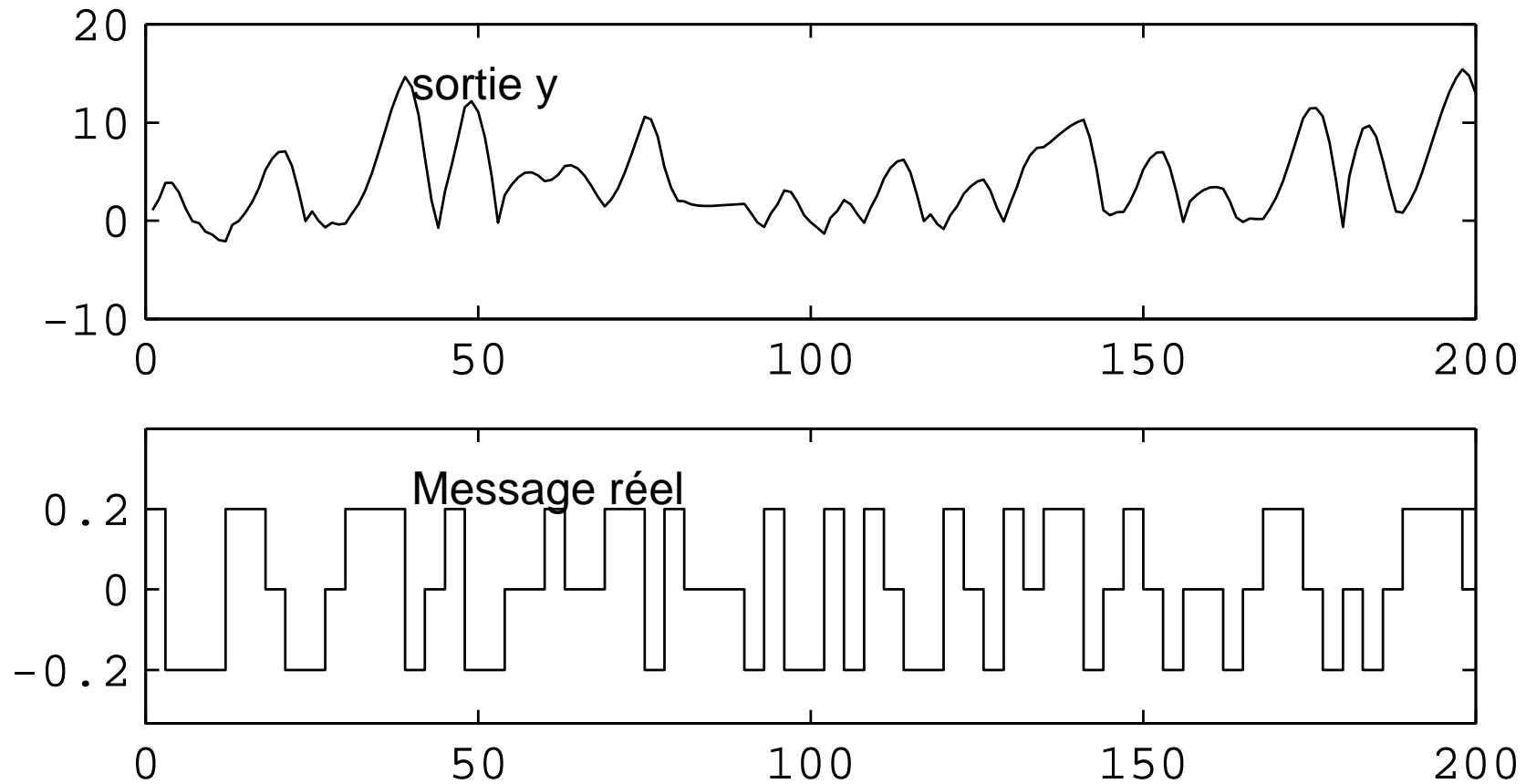
$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad F = 5$$

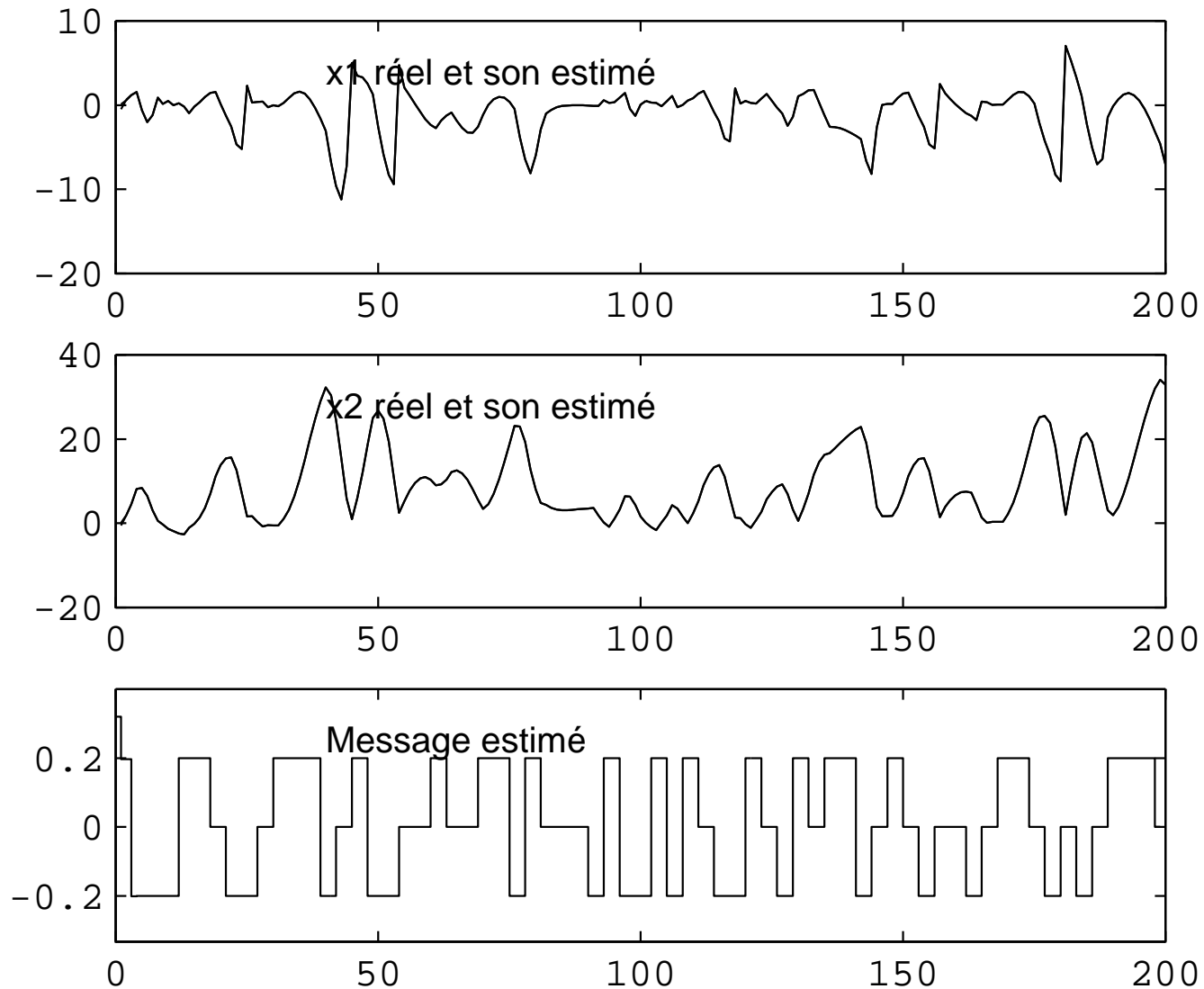
Cryptage – décryptage



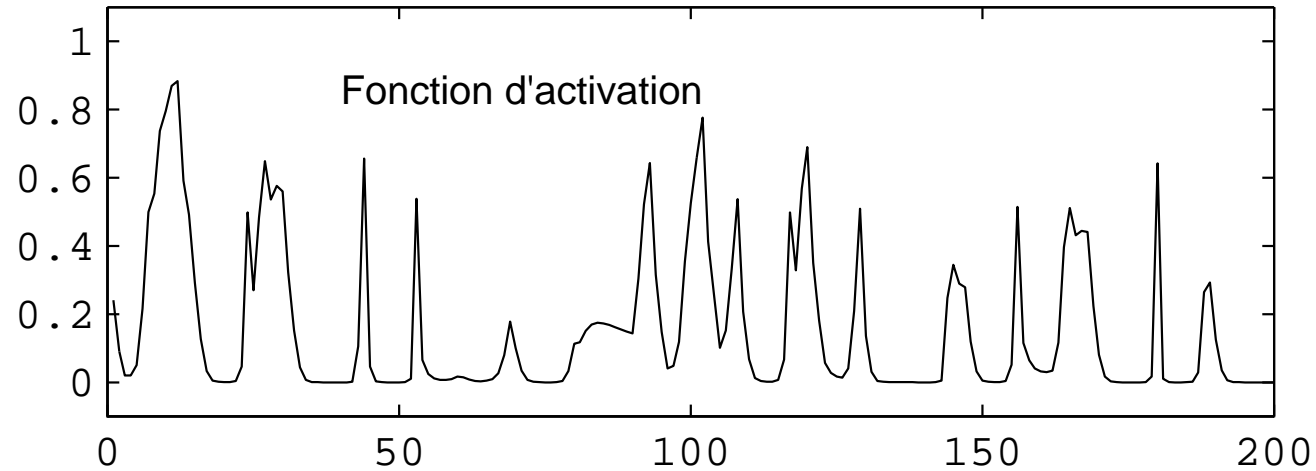
Signal transmis et message originel



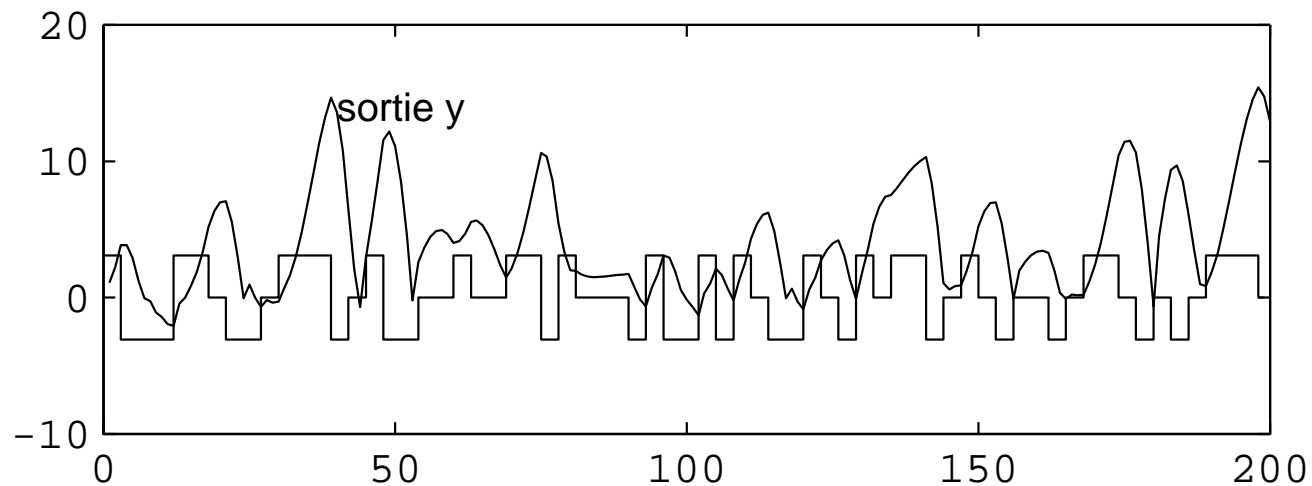
Etats réels et estimés et message décrypté



Fonction d'activation



Sortie et message



- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) au systèmes NL

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) au systèmes NL
- Portée générale de l’approche proposée liée au pouvoir de représentation des multimodèles

- Intérêt de la représentation multimodèle des systèmes NL
- Capacité à transposer des résultats “classiques” (cas linéaire) au systèmes NL
- Portée générale de l’approche proposée liée au pouvoir de représentation des multimodèles
- Absence d’analyse spécifique de la nature de la non-linéarité