De l'identification au diagnostic des systèmes non linéaires à l'aide d'un multimodèle découplé

Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot et Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR7039, Nancy-Université, CNRS

Réunion du Groupe de Travail S3 Sûreté-Surveillance-Supervision
4 octobre 2007

Problématique

- Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Problématique

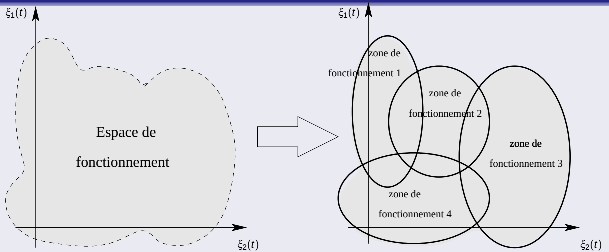
- Les systèmes physiques présentent souvent un comportement de type non linéaire
- Modèles non linéaires relativement difficiles à manipuler
- Nombreux outils d'analyse pour les modèles linéaires
- Dilemme entre la précision (modèles non linéaires) et l'*utilisabilité* (modèles linéaires)

Approche proposée

Approximation du système non linéaire par un **multimodèle** :

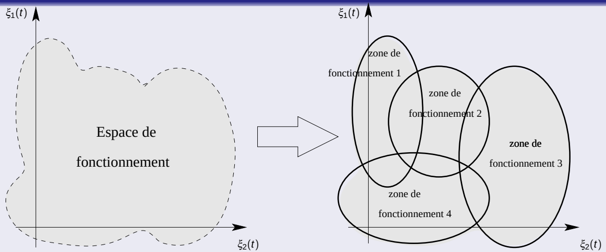
1. ensemble de sous-modèles
2. mécanisme d'interpolation

Principe du multimodèle



SYSTEME NON LINEAIRE *REPRESENTATION MULTIMODELE*

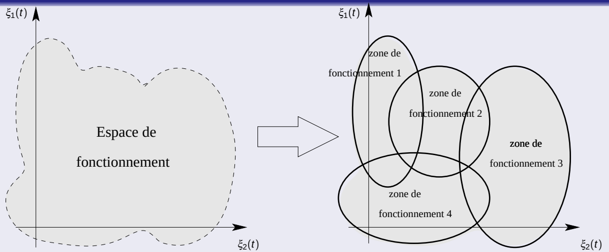
Principe du multimodèle



SYSTEME NON LINEAIRE *REPRESENTATION MULTIMODELE*

- Décomposition en zones de fonctionnement

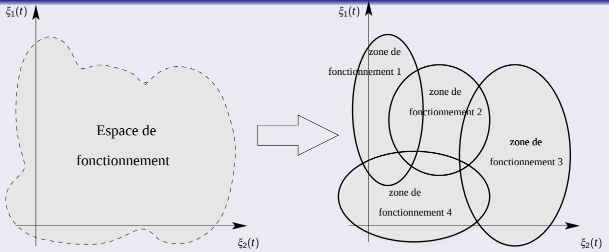
Principe du multimodèle



SYSTEME NON LINEAIRE *REPRESENTATION MULTIMODELE*

- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire

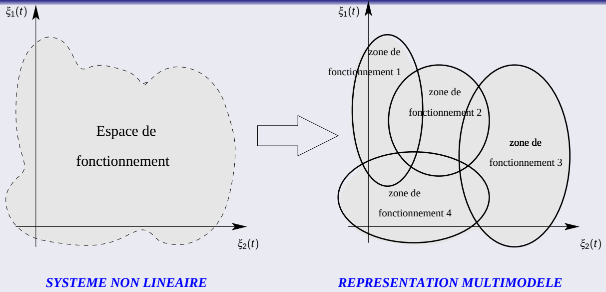
Principe du multimodèle



SYSTEME NON LINEAIRE ***REPRESENTATION MULTIMODELE***

- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Principe du multimodèle



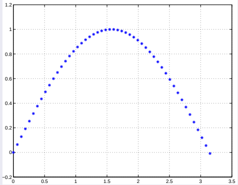
- Décomposition en zones de fonctionnement
- Chaque zone est modélisée par un sous-modèle, souvent linéaire
- La contribution des sous-modèles est quantifiée par une fonction poids

Intérêts des multimodèles

- Bon moyen de représenter un système non linéaire
- Extension des résultats du cas linéaire au cas non linéaire

Comportement non linéaire

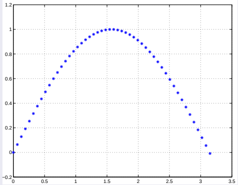
- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



Représentation par un multimodèle

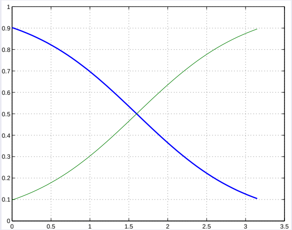
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$



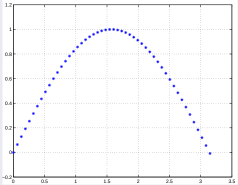
Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



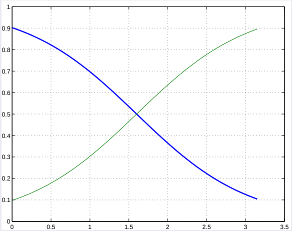
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

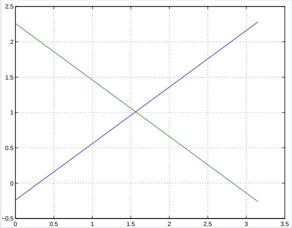


Représentation par un multimodèle

Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$

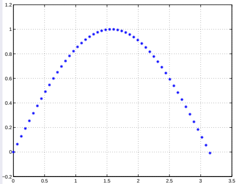


Sous-modèles : $f_i(x)$



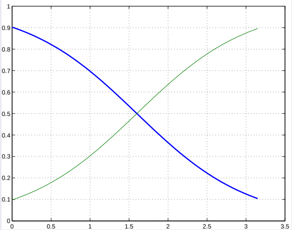
Comportement non linéaire

- Cas statique
- $y(x) = \sin(x)$
- $x \in [0, 3.2]$

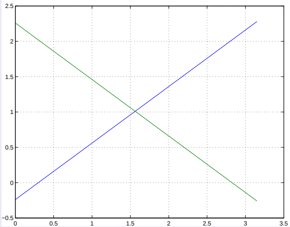


Représentation par un multimodèle

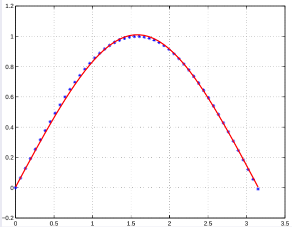
Fonctions de pondération : $\mu_i(x)$



Sous-modèles : $f_i(x)$



$\hat{y}(x) = \mu_1(x)f_1(x) + \mu_2(x)f_2(x)$



Structures des multimodèles

Structure classique
Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure
Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique
Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure
Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique
Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure
Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Structures des multimodèles

Structure classique
Multimodèle de Takagi-Sugeno

- Un seul vecteur d'état pour tous les sous-modèles
- Nombre d'états identique pour les sous-modèles

Nouvelle structure
Multimodèle découplé

- Un vecteur d'état indépendant pour chaque sous-modèle
- Nombres d'états différents pour les sous-modèles
- Peu étudié dans la littérature

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un multimodèle découplé à partir des données entrée/sortie d'un système, en fixant a priori les zones de fonctionnement

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un multimodèle découplé à partir des données entrée/sortie d'un système, en fixant a priori les zones de fonctionnement

Problème lié au diagnostic

Développer des méthodes de surveillance des systèmes non linéaires basées sur le multimodèle découplé

Plan

1. Structures des multimodèles
   - Multimodèle de Takagi-Sugeno
   - Multimodèle découplé
2. Identification
   - Estimation paramétrique
   - Fonction de sensibilité
   - Exemples d'identification
   - Multimodèle découplé modifié
3. Estimation d'état
   - Synthèse de l'observateur
   - Exemple de simulation
   - Placement des valeurs propres
4. Conclusion

Plan

Plan

Plan

1. Structures des multimodèles
   - Multimodèle de Takagi-Sugeno
   - Multimodèle découplé
2. Identification
   - Estimation paramétrique
   - Fonction de sensibilité
   - Exemples d'identification
   - Multimodèle découplé modifié
3. Estimation d'état
   - Synthèse de l'observateur
   - Exemple de simulation
   - Placement des valeurs propres
4. Conclusion

Structures des multimodèles

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) & = & \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))A_i\}x(k) + \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))B_i\}u(k) \ , \\ y(k) & = & \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))C_i\}x(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) &= \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))A_i\}x(k) + \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))B_i\}u(k) \ , \\ y(k) &= \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))C_i\}x(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

Structure classique

Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) = \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))A_i\}x(k) + \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))B_i\}u(k) \ , \\ y(k) = \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))C_i\}x(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

- Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps

Structure classique

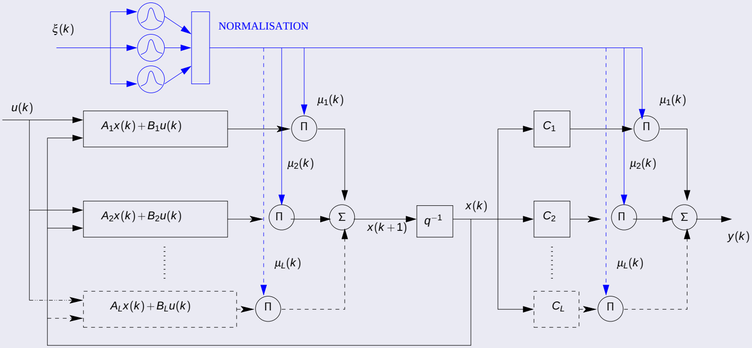
Multimodèle de Takagi-Sugeno : Multimodèle à état unique

$$\begin{cases} x(k+1) = \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))A_i\}x(k) + \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))B_i\}u(k) \ , \\ y(k) = \{\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))C_i\}x(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

- Analogue à un modèle à paramètres variables dans le temps
- Un même vecteur d'état pour les sous-modèles
- **La dimension de l'état des sous-modèles est la même**

Multimodèle Takagi-Sugeno



Commentaires

- La notion de sous-modèle n'existe pas
- Lien avec la modélisation floue (règles de type : *si* **prémisse** *alors* **conséquence**)

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} x_i(k+1) & = & A_i x_i(k) + B_i u(k) \ , \\ y_i(k) & = & C_i x_i(k) \ , \\ y(k) & = & \sum\limits_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

Nouvelle structure

Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} x_i(k+1) & = & A_i x_i(k) + B_i u(k) \ , \\ y_i(k) & = & C_i x_i(k) \ , \\ y(k) & = & \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles

Nouvelle structure

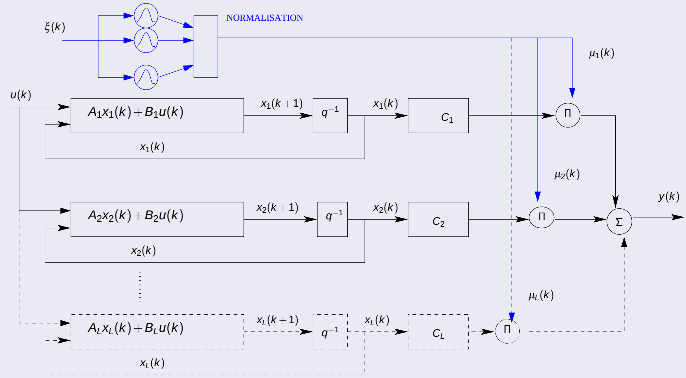
Multimodèle découplé : Multimodèle à états découplés

$$\begin{cases} x_i(k+1) & = & A_i x_i(k) + B_i u(k) \ , \\ y_i(k) & = & C_i x_i(k) \ , \\ y(k) & = & \sum\limits_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

- La sortie du multimodèle est la somme pondérée des sorties des sous-modèles
- L'espace d'état de chaque sous-modèle est indépendant
- **La dimension de l'état des sous-modèles peut être différente**

Multimodèle découplé



Commentaires

- Mise en parallèle de modèles de type Wiener
- Véritable existence des sous-modèles

Procédure d’estimation paramétrique

Élaboration d'un multimodèle

Procédure d'estimation paramétrique

Élaboration d'un multimodèle

1. Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement

Élaboration d’un multimodèle

1. Décomposition de l’espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
2. Agrégation des sous-modèles

Procédure d'estimation paramétrique

Élaboration d'un multimodèle

1. Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
2. Agrégation des sous-modèles
3. Détermination des paramètres de chaque sous-modèle

Élaboration d'un multimodèle

1. Décomposition de l'espace de fonctionnement en différentes zones de fonctionnement
2. Agrégation des sous-modèles
3. Détermination des paramètres de chaque sous-modèle

Problème lié à l'identification

Identifier les paramètres de L sous-modèles d'un multimodèle à états découplés à partir des données entrée/sortie d'un système SISO, en connaissant les fonctions de pondération $\mu_i(\xi(k))$

Multimodèle découplé

$$\begin{cases} \hat{x}_i(k+1) &=& A_i(\theta_i)\hat{x}_i(k) + B_i(\theta_i)u(k) + D_i(\theta_i) \ , \\ \hat{y}_i(k) &=& C_i(\theta_i)\hat{x}_i(k) \ , \\ \hat{y}(k) &=& \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))\hat{y}_i(k) \ , \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) = 1 \text{ et } 0 \leq \mu_i(\xi(k)) \leq 1, \forall k, \forall i \in \{1, ..., L\}$$

La variable de décision $\xi(k)$ est le signal de commande $u(k)$

Vecteur de paramètres

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta_1 \ldots \theta_i \ldots \theta_L]^T \text{ vecteur paramètres multimodèle} \\ \theta_p &= [\theta_{p,1} \ldots \theta_{p,q} \ldots \theta_{p,q_p}]^T \text{ vecteur paramètres sous-modèle } p \end{aligned}$$

Critères d'estimation

Critères d'estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{y}(k,\theta) - y(k)\right)^2 \quad ,$$

Critères d’estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (\hat{y}(k,\theta) - y(k))^2 \quad ,$$

- Critère local :

$$J_L(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N} \mu_i(\xi(k))(\hat{y}_i(k,\theta) - y(k))^2 \quad ,$$

Critères d'estimation

- Critère global :

$$J_G(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (\hat{y}(k,\theta) - y(k))^2 \quad ,$$

- Critère local :

$$J_L(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{N} \mu_i(\xi(k))(\hat{y}_i(k,\theta) - y(k))^2 \quad ,$$

- Critère combiné ou mixte :

$$J_C(\theta) = \alpha J_G(\theta) + (1-\alpha) J_L(\theta), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad .$$

Algorithme de Gauss-Newton avec régularisation

Procédure itérative de minimisation d'un critère

$$\theta^{+} = \theta - \Delta(\mathrm{H} + \lambda I)^{-1}\mathrm{G} \ ,$$

- θ vecteur de paramètres à une itération particulière
- θ^{+} cette même valeur à l'itération suivante
- $\mathrm{H} = \frac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial\theta\partial\theta^{\mathrm{T}}}$ la matrice hessienne
- $\mathrm{G} = \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial\theta}$ le vecteur gradient
- Δ coefficient de relaxation
- λ paramètre de régularisation (algorithme de Marquardt)

Calcul du vecteur gradient

$$\mathrm{G}_G(\theta) = \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial\theta} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)\frac{\partial\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta} \;, \qquad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k) \;,$$

Calcul de la matrice hessienne

$$\mathrm{H}_G(\theta) = \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T} = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\to 0}\frac{\partial^2\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta^T} \;,$$

$$\mathrm{H}_G(\theta) \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\hat{y}(k,\theta)}{\partial\theta^T} \;.$$

Calcul du vecteur gradient

$$\mathrm{G}_G(\theta) \quad = \quad \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k) \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \quad , \qquad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k) \ ,$$

Calcul de la matrice hessienne

$$\mathrm{H}_G(\theta) \quad = \quad \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\rightarrow 0} \frac{\partial^2 \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta^T} \ ,$$

$$\mathrm{H}_G(\theta) \quad \approx \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta^T} \ .$$

Estimation paramétrique – critère global

Calcul du vecteur gradient

$$\mathrm{G}_G(\theta) \quad = \quad \frac{\partial J_G(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k) \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \quad , \qquad \varepsilon(k) = \hat{y}(k) - y(k) \ ,$$

Calcul de la matrice hessienne

$$\mathrm{H}_G(\theta) \quad = \quad \frac{\partial^2 J_G(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\to 0} \frac{\partial^2 \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta^T} \ ,$$

$$\mathrm{H}_G(\theta) \quad \approx \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta^T} \ .$$

Calcul des fonctions de sensibilité de premier ordre : $\frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta}$.

Fonctions de sensibilité

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{y}(k,\theta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) \frac{\partial \hat{y}_i(k,\theta)}{\partial \theta} \quad , \\
\frac{\partial \hat{y}_i(k,\theta)}{\partial \theta_{p,q}} &= \frac{\partial C_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \hat{x}_i(k,\theta) + C_i(\theta) \frac{\partial \hat{x}_i(k,\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \quad , \\
\frac{\partial \hat{x}_i(k+1,\theta)}{\partial \theta_{p,q}} &= \frac{\partial A_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \hat{x}_i(k,\theta) + A_i(\theta) \frac{\partial \hat{x}_i(k,\theta)}{\partial \theta_{p,q}} + \frac{\partial B_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} u(k) + \frac{\partial D_i(\theta)}{\partial \theta_{p,q}} \quad .
\end{aligned}$$

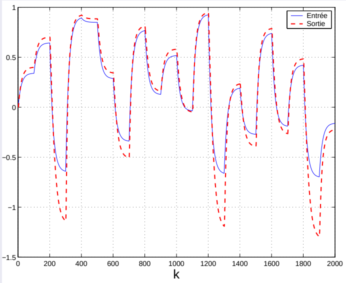
Les sous-modèles sont complètement indépendants alors :

$$\frac{\partial \hat{y}_i(k,\theta)}{\partial \theta_p} = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq i \quad \begin{matrix} i = 1,2,...,L \\ p = 1,2,...,L \end{matrix} \quad .$$

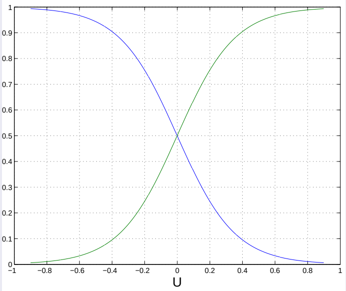
Modèle non linéaire

$$y(k+1) = (0.6-0.1a(k))y(k)+a(k)u(k), \quad u(k) = \in [-0.9, 0.9] \;,$$
$$a(k) = \frac{0.6-0.06y(k)}{1+0.2y(k)} \;.$$

Entrée–Sortie

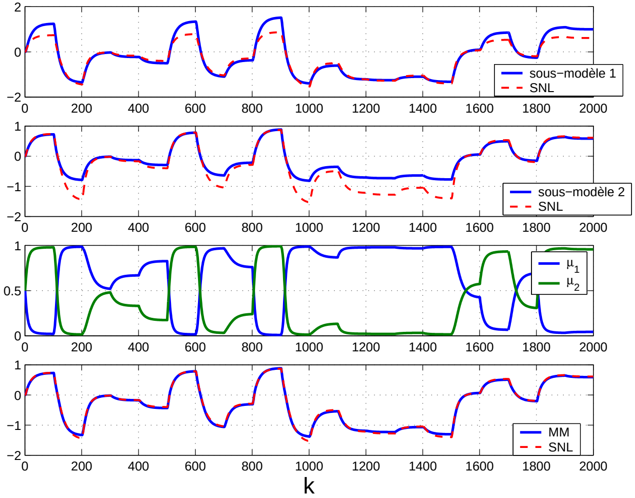


Fonctions de pondération



Fonctions de pondération dépendantes de la commande

Exemple d'identification 1

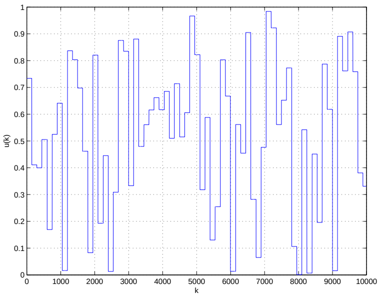


Bonne caractérisation du comportement non linéaire

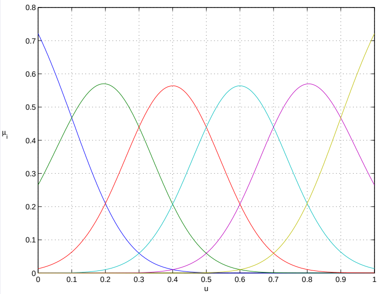
Modèle non linéaire

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k)+\sin(\gamma u(k))(\beta-u(k)) \;, \\
y(k) &= x(k) \;, \\
A &= 0.95, \quad \gamma=0.8\pi, \quad \beta=1.5 \;.
\end{aligned}
$$

Entrée du système



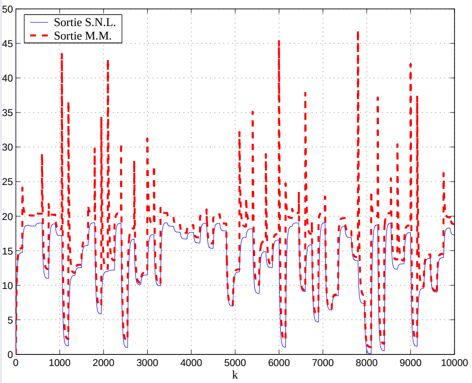
Fonctions de pondération



Fonctions de pondération dépendantes de la commande

Démarche analytique

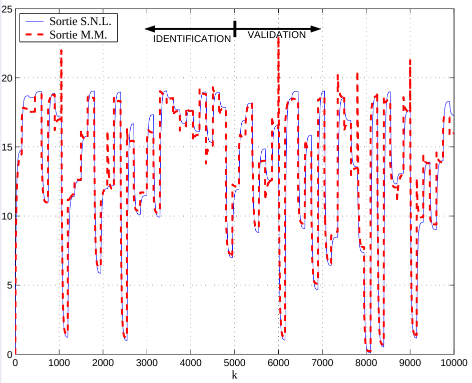
- Linéarisation du modèle non linéaire (développement en séries de Taylor au premier ordre)
- L sous-modèles linéarisés autour de différents points de fonctionnement



Problème de décrochage

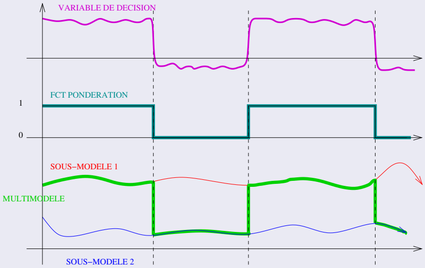
Identification

- Identification en utilisant la méthode proposée
- Utilisation d'un critère global (adéquation entrée/sortie)



Problème de décrochage

Définition



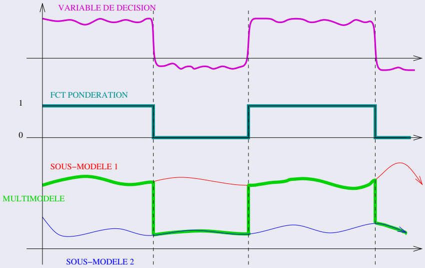
Problème de conditions initiales sur les sorties des sous-modèles quand elles sont mises à contribution (mélange dans l'équation statique)

Solutions

- Mélanger fortement les fonctions de pondération
- Augmenter le nombre des sous-modèles
- Modifier la structure du multimodèle

Phénomène de décrochage

Définition

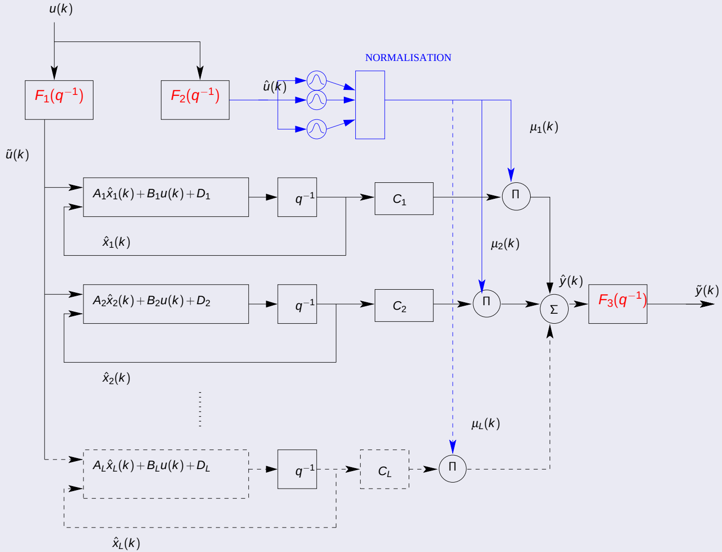


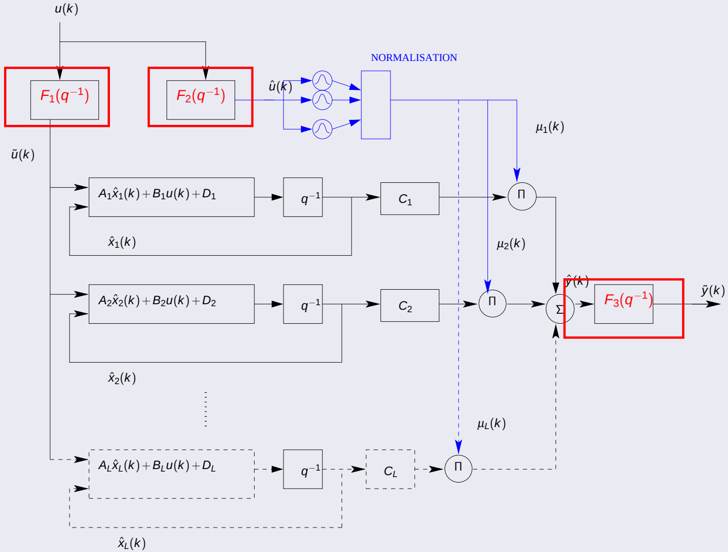
Problème de conditions initiales sur les sorties des sous-modèles quand elles sont mises à contribution (mélange dans l'équation statique)

Solutions

- Mélanger fortement les fonctions de pondération
- Augmenter le nombre des sous-modèles
- Modifier la structure du multimodèle

Nouvelle structure





u(k)
F1(q−1)
F2(q−1)
û(k)
NORMALISATION
μ1(k)
ũ(k)
A1x̂1(k)+B1u(k)+D1
q−1
C1
Π
x̂1(k)
μ2(k)
ŷ(k)
A2x̂2(k)+B2u(k)+D2
q−1
C2
Π
Σ
F3(q−1)
ỹ(k)
x̂2(k)
μL(k)
ALx̂L(k)+BLu(k)+DL
q−1
CL
Π
x̂L(k)

Nouvelles équations

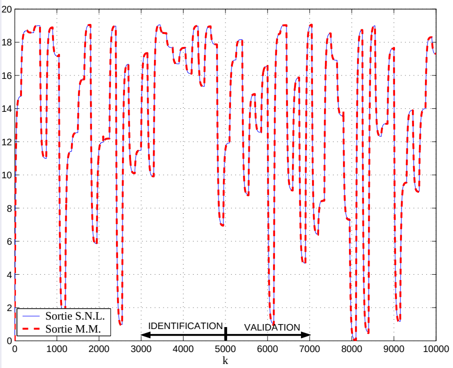
$$
\begin{aligned}
\hat{x}_i(k+1) &= A_i(\theta)\hat{x}_i(k) + B_i(\theta)\bar{u}(k) + D_i(\theta) \ , \\
\hat{y}_i(k) &= C_i(\theta)\hat{x}_i(k) \ , \\
\bar{y}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k))\hat{y}_i(k) \text{ avec } \xi(k) = \bar{\bar{u}}(k) \ , \\
\bar{u}(k) &= F_1(k,\theta)u(k) \ , \\
\bar{\bar{u}}(k) &= F_2(k,\theta)u(k) \ , \\
\hat{y}(k) &= F_3(k,\theta)\bar{y}(k) \ .
\end{aligned}
$$

$\hat{y}$ est la nouvelle sortie du multimodèle

Exemple de filtres utilisés

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(k+1) &= \alpha_1\bar{u}(k) + (1-\alpha_1)u(k+1) \ , \\
\bar{\bar{u}}(k+1) &= \alpha_2\bar{\bar{u}}(k) + (1-\alpha_2)u(k+1) \ , \\
\hat{y}(k+1) &= \alpha_3\hat{y}(k) + (1-\alpha_3)\bar{y}(k+1) \ .
\end{aligned}
$$

Élimination du décrochage



Méthode	J_G
Linéarisation	7.99×10^4
Estimation sans filtrage	1.46×10^4
Estimation avec filtrage	21.72

Estimation d'état

Réécriture des équations du multimodèle

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u(k) \ ,$$
$$y_i(k) = C_i x_i(k) \ ,$$
$$y(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ ,$$
$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

Notations

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ , \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} , \ \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix} ,$$

$$\tilde{C}(k) = \left[\mu_1(\xi(k)) C_1 \dots \mu_i(\xi(k)) C_i \dots \mu_L(\xi(k)) C_L \right], \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) \ .$$

Réécriture des équations du multimodèle

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) \ , \\ y_i(k) &= C_i x_i(k) \ , \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ , \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A} x(k) + \tilde{B} u(k) \ , \\ y(k) &= \tilde{C}(\xi(k)) x(k) \ , \end{aligned}$$

$$x_i \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^n, \ n = \sum_{i=1}^{L} n_i$$

Notations

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ , \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(k) = \left[\mu_1(\xi(k)) C_1 \dots \mu_i(\xi(k)) C_i \dots \mu_L(\xi(k)) C_L\right], \ \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) \ .$$

Réécriture des équations du multimodèle

$$
\begin{aligned}
x_i(k+1) &= A_i x_i(k) + B_i u(k) \ , \\
y_i(k) &= C_i x_i(k) \ , \\
y(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(\xi(k)) y_i(k) \ ,
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
x(k+1) &= \tilde{A} x(k) + \tilde{B} u(k) \ , \\
y(k) &= \tilde{C}(\xi(k)) x(k) \ ,
\end{aligned}
$$

$$
x_i \in \mathbb{R}^{n_i} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^n, \ n = \sum_{i=1}^{L} n_i
$$

Notations

$$
x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_i(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \ , \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix}, \ \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_L \end{bmatrix},
$$

$$
\tilde{C}(k) = \left[\mu_1(\xi(k)) C_1 \ldots \mu_i(\xi(k)) C_i \ldots \mu_L(\xi(k)) C_L \right], \ \mu_i(\xi(k)) = \mu_i(k) \ .
$$

Stabilité du multimodèle découplé

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Stabilité du multimodèle découplé

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} ,$$

Stabilité du multimodèle découplé

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} \quad ,$$

- $\tilde{A}$ est une matrice bloc diagonale

Stabilité du multimodèle découplé

Critère de stabilité

Le multimodèle découplé est stable si et seulement si tous les sous-modèles sont stables

Analyse de la stabilité

Étude des valeurs propres de la matrice $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_i & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_L \end{bmatrix} \quad ,$$

- $\tilde{A}$ est une matrice bloc diagonale
- $\tilde{A}$ est une matrice de Schur si et seulement si A_i sont des matrices de Schur

Structure de l'observateur

Extension de l'observateur de Luenberger classiquement utilisé :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \tilde{A}\hat{x}(k)+\tilde{B}u(k)+\tilde{K}(y(k)-\hat{y}(k)) \ , \\ \hat{y}(k) &= \tilde{C}(k)\hat{x}(k) \ , \end{aligned}$$

Théorème (Convergence asymptotique)

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est assurée s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1...L \, ,$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= \begin{bmatrix} \mu_1(k)C_1 & \dots & \mu_i(k)C_i & \dots & \mu_L(k)C_L \end{bmatrix} \ , \\ \tilde{C}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\tilde{C}_i \ , \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$\begin{aligned} A_{obs}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i \ , \\ \Phi_i &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \end{aligned}$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= \begin{bmatrix} \mu_1(k)C_1 & \dots & \mu_i(k)C_i & \dots & \mu_L(k)C_L \end{bmatrix} \ , \\ \tilde{C}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\tilde{C}_i \ , \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$\begin{aligned} A_{obs}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i \ , \\ \Phi_i &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \end{aligned}$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= \begin{bmatrix} \mu_1(k)C_1 & \dots & \mu_i(k)C_i & \dots & \mu_L(k)C_L \end{bmatrix} \ , \\ \tilde{C}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\tilde{C}_i \ , \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$\begin{aligned} A_{obs}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i \ , \\ \Phi_i &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \end{aligned}$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= \begin{bmatrix} \mu_1(k)C_1 & \dots & \mu_i(k)C_i & \dots & \mu_L(k)C_L \end{bmatrix} , \\ \tilde{C}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\tilde{C}_i \ , \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$\begin{aligned} A_{obs}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i \ , \\ \Phi_i &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \end{aligned}$$

Démonstration

- On note $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.
- Sa dynamique est :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= A_{obs}(k)e(k), \\ A_{obs}(k) &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}(k) \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $\tilde{C}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= \begin{bmatrix} \mu_1(k)C_1 & \dots & \mu_i(k)C_i & \dots & \mu_L(k)C_L \end{bmatrix} \ , \\ \tilde{C}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\tilde{C}_i \ , \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_i & \dots & 0 \end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

- Réécriture de $A_{obs}(k)$:

$$\begin{aligned} A_{obs}(k) &= \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i \ , \\ \Phi_i &= \tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i \ . \end{aligned}$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) \;=\; e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) \;=\; e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) \quad = \quad e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \quad .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) \quad = \quad e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \quad ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 \quad .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \quad ,$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) \quad = \quad e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) \quad = \quad e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

Convergence de l'observateur (2/3)

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

- Fonction de Lyapunov quadratique :

$$V(e(k)) = e^T(k)Pe(k), \quad P = P^T \text{ et } P > 0 \ .$$

- L'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 si :
  - $V(e(k)) > 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
  - $\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) < 0, \forall k \in \mathbb{N}$,
- Variation de $V(e(k))$:

$$\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P\}e(k) \ ,$$

-

$$A_{obs}^T(k)PA_{obs}(k) - P < 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(e(k)) < 0 \ .$$

- En remplaçant $A_{obs}(k) = \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i$:

$$\sum_{j=1}^{L} \mu_j(k)\Phi_j^T P \sum_{i=1}^{L} \mu_i(k)\Phi_i - P < 0 \ ,$$

Convergence de l'observateur (3/3)

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P\Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 \, .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A}-\tilde{K}\tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A}-\tilde{K}\tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 \; , i = 1...L.$$

Bilinéaire en P et $\tilde{K}$.

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1...L.$$

Linéaire en P et G.

Convergence de l'observateur (3/3)

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P\Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 \ .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 \ , i = 1 \ldots L.$$

Bilinéaire en P et $\tilde{K}$.

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1 \ldots L.$$

Linéaire en P et G.

- En utilisant le complément de Schur :

$$\sum_{i=1}^{L} \mu_i(k) \begin{bmatrix} P & \Phi_i^T P \\ P\Phi_i & P \end{bmatrix} > 0 \ .$$

- Également satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P & (\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i)^T P \\ P(\tilde{A} - \tilde{K}\tilde{C}_i) & P \end{bmatrix} > 0 \ , i = 1 \ldots L.$$

  Bilinéaire en P et $\tilde{K}$.

- Finalement, en posant : $G = P\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1 \ldots L.$$

  Linéaire en P et G.

Remarques

- La convergence asymptotique dépend de l'existence d'une matrice commune P satisfaisant un ensemble de LMIs
- Pour un nombre important de sous-modèles l'ensemble LMI n'a pas de solution

Théorème (Convergence asymptotique 2)

La convergence asymptotique de l'erreur d'estimation est assurée s'il existe des matrices symétriques et définies positives P_i et P_j, une matrice G et une matrice M vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L,$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = M^{-1}G$.

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$
\begin{aligned}
V(e(k)) &= e^T(k)\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)P_i e(k), P_i = P_i^T, P_i > 0 \\
V(e(k)) &= e^T(k)P(k)e(k).
\end{aligned}
$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$
\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k)\}e(k),
$$

-

$$
A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.
$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$
\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)\mu_j(k+1)\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j\Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.
$$

Convergence de l'observateur (1/2)

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$
\begin{aligned}
V(e(k)) &= e^T(k)\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)P_i e(k), P_i = P_i^T, P_i > 0 \\
V(e(k)) &= e^T(k)P(k)e(k).
\end{aligned}
$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$
\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k)\}e(k),
$$

- $$
A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.
$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$
\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)\mu_j(k+1)\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j\Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.
$$

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$
\begin{aligned}
V(e(k)) &= e^T(k)\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)P_i e(k), P_i = P_i^T, P_i > 0 \\
V(e(k)) &= e^T(k)P(k)e(k).
\end{aligned}
$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$
\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k)\}e(k),
$$

-

$$
A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k) < 0 \qquad \rightarrow \qquad \Delta V(e(k)) < 0.
$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$
\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)\mu_j(k+1)\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j\Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.
$$

Démonstration

- Considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique :

$$
\begin{aligned}
V(e(k)) &= e^T(k)\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)P_i e(k),\, P_i = P_i^T,\, P_i > 0 \\
V(e(k)) &= e^T(k)P(k)e(k).
\end{aligned}
$$

- Variation de $V(e(k))$:

$$
\Delta V(e(k)) = e^T(k)\{A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k)\}e(k),
$$

-

$$
A_{obs}^T(k)P(k+1)(k)A_{obs}(k) - P(k) < 0 \quad \rightarrow \quad \Delta V(e(k)) < 0.
$$

- En remplaçant $A_{obs}(k)$ et en utilisant le complément de Schur :

$$
\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\mu_i(k)\mu_j(k+1)\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j\Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0.
$$

Convergence de l'observateur (2/2)

- $$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

Convergence de l'observateur (2/2)

- $$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

Convergence de l'observateur (2/2)

- $$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1 \ldots L.$$

Convergence de l'observateur (2/2)

- $$\begin{bmatrix} P_i & \Phi_i^T P_j \\ P_j \Phi_i & P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

- On peut cependant montrer que :

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\Phi_i)^T \\ M\Phi_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

où M est une matrice quelconque ($M \neq M^T$) à déterminer, implique la LMI précédente.

- Finalement, en posant : $\tilde{G} = M\tilde{K}$

$$\begin{bmatrix} P_i & (M\tilde{A} - G\tilde{C}_i)^T \\ M\tilde{A} - G\tilde{C}_i & M + M^T - P_j \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i,j = 1...L.$$

Si $P_i = P_j = M = P$ alors ce théorème coïncide avec le précédent.

Exemple de simulation

Estimation d'état

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.7 & -0.8 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ -0.6 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \end{bmatrix}^T, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}^T, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad C_3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Estimation d'état

Il s'agit d'estimer l'état d'un système décrit par un multimodèle découplé constitué de $L = 3$ sous-modèles :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.5 & 0.2 \\ 0.7 & -0.8 & 0 \\ -2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ -0.6 & -0.5 \end{bmatrix},$$

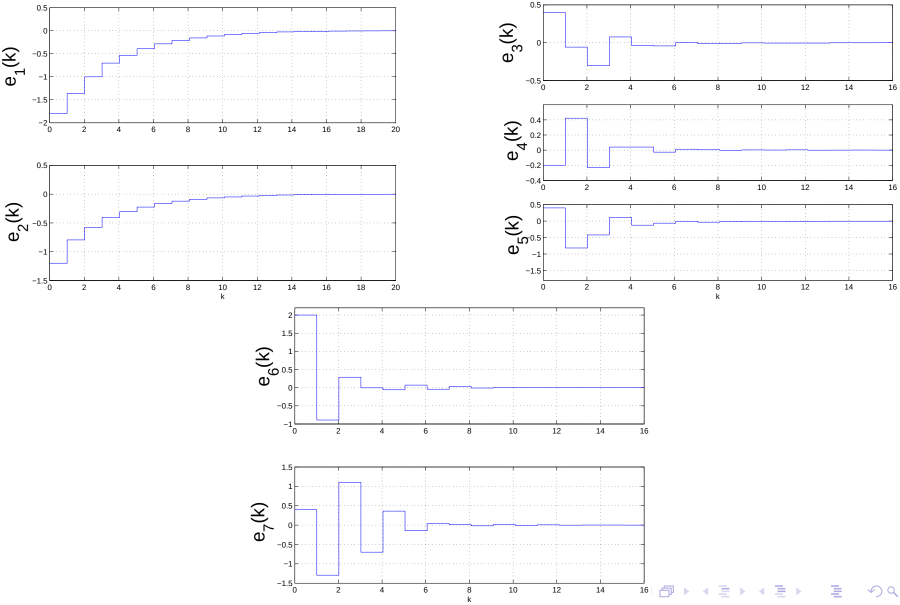
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \end{bmatrix}^T, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}^T, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \qquad C_3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.3 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}.$$

- La matrice $\tilde{A}$ est de Schur, alors le multimodèle est stable
- Le gain de l'observateur est :

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0.041 & 0.020 \\ 0.194 & 0.113 \end{matrix}}_{K_1^T} & \underbrace{\begin{matrix} 0.160 & 0.190 & 0.221 \\ -0.299 & -0.044 & -0.70 \end{matrix}}_{K_2^T} & \underbrace{\begin{matrix} -0.090 & -0.181 \\ 0.172 & 0.268 \end{matrix}}_{K_3^T} \end{bmatrix}^T$$

Exemple de simulation



Exemple de simulation

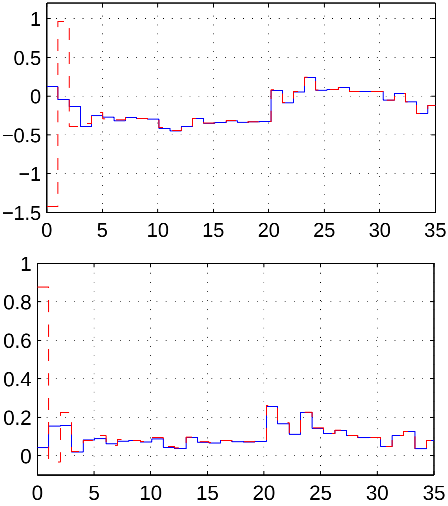


FIG.: Sorties du multimodèle (trait plein) et leurs estimées (pointillés).

Objectif

Imposer une dynamique à l'erreur d'estimation

Théorème (D-stabilité d'une matrice)

Les valeurs propres d'une matrice X sont à l'intérieur du disque de rayon R et de centre $(q,0)$ si :

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP+X^TP \\ -qP+PX & -RP \end{bmatrix} < 0,$$

où P est une matrice symétrique définie positive.

Si $R=1$ et $q=0$ alors :

$$X^TPX-P<0$$

condition de stabilité pour un système linéaire à temps discret.

Placement des valeurs propres 2/2

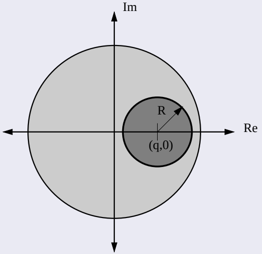
Théorème

Les valeurs propres de l'observateur sont placées à l'intérieur du disque de rayon R et de centre $(q,0)$ s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice G vérifiant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP + \tilde{A}^T P - \tilde{C}_i^T G^T \\ -qP + P\tilde{A} - G\tilde{C}_i & -RP \end{bmatrix} < 0, i = 1 \ldots L$$

et le gain de l'observateur est donné par $\tilde{K} = P^{-1}G$.

- Choix de région
- Eliminer les fortes oscillations



Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Travail réalisé

- Mise en place d'une procédure d'identification d'un système non linéaire SISO
- Conception d'un observateur proportionnel d'ordre plein
- Réduction du conservatisme de la solution proposée

Conclusion

Conclusion

- Utilisation d'un multimodèle pour effectuer la modélisation et le diagnostic d'un système non linéaire
- Nouveauté : la dimension des sous-modèles peut être différente

Travail réalisé

- Mise en place d'une procédure d'identification d'un système non linéaire SISO
- Conception d'un observateur proportionnel d'ordre plein
- Réduction du conservatisme de la solution proposée

Perspectives

- Extension à l'identification de systèmes MIMO
- Synthèse d'autres types d'observateurs, par exemple, observateur proportionnel intégral et observateur à entrées inconnues

Références

- Orjuela, R., Ragot, J., Maquin, D. : Identification des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle à états découplés. In : Journées Identification et Modélisation Expérimentale, JIME'06, Poitiers, France (2006)
- Orjuela, R., Ragot, J., Maquin, D. : Nonlinear system identification using uncoupled state multiple-model approach. In : Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2006, Nancy, France (2006)
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : State estimation for nonlinear systems using decoupled multiple model. *International Journal of Modelling Identification and Control* (à paraître), 2007
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : State estimation for nonlinear discrete-time systems based on the decoupled multiple model approach. In : 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO, Angers, France (2007)
- Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., Maquin, D. : Estimation d'état des systèmes non linéaires par une approche multimodèle découplé. In : 2ème Journées Doctorales-Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS, Reims, France (2007)