

José RAGOT and Didier MAQUIN

Institut National Polytechnique de Lorraine
Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR CNRS 7039 / INPL / UHP
2, avenue de la forêt de Haye, 54 516 Vandœuvre les Nancy

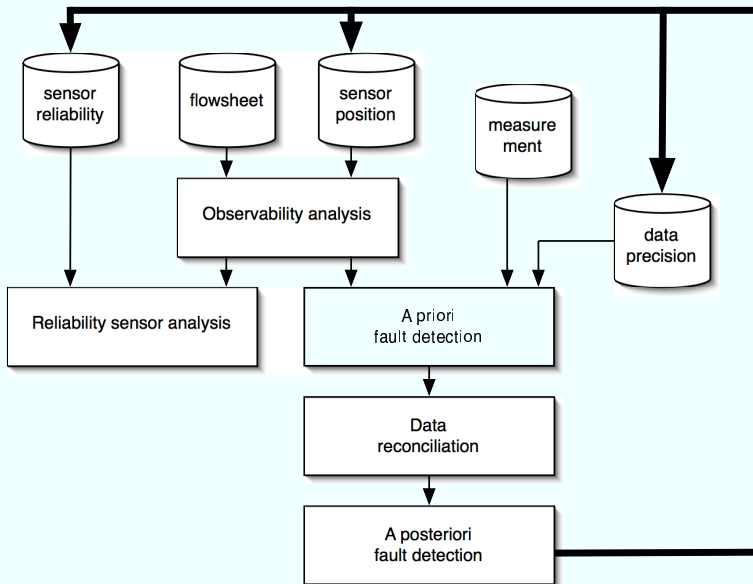


S3, Mars 13, 2006

- Les mesures collectées sur un processus physiques sont en général affectées d'erreurs.
- Les mesures sont nécessaires pour connaître l'état de fonctionnement d'un processus
- Les mesures sont nécessaires pour la conduite d'un processus et pour l'optimisation de son fonctionnement
- La réconciliation de données utilise le principe de redondance massive ou analytique
- Model based statistical methods are provided to analyse and validate plant measurements.

- Il y a toujours un désaccord entre un système physique et son modèle. L'origine de ce désaccord est la présence d'incertitudes
- Les incertitudes peuvent affecter la description du processus physique, les paramètres des modèles, les mesures.
- Les incertitudes sont en général bornées : l'inertie d'un système physique varie au cours du temps entre des valeurs minimales et maximales.
- La modélisation peut prendre en compte des connaissances incertaines : un coefficient de cinétique chimique compris entre deux bornes.
- Le diagnostic peut prendre en compte des incertitudes : un résidu indicateur de défaillance peut dépendre d'un paramètre incertain.
- Il est préférable de délivrer un diagnostic imprécis qu'un diagnostic sans sa précision

Etapes de la validation de données



Sommaire

- Définitions et concepts de base
- Propriétés
- Exemples introductifs
- Systèmes linéaires
- Détection de défaut à base de modèle
- Validation de données
- Observateur d'état
- Constraint Satisfaction Problem
- Conclusion

- Un intervalle (fermé) est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{I}$.
- Exemple : $[1, 3]$, $[-\infty, -2]$ sont des intervalles

$[1, 3] \cup [4, 6]$ n'est pas un intervalle

- Intervalle

$$[x] = x \in \mathbb{R} \mid x^- \leq x \leq x^+$$

- Largeur

$$w([x]) = x^+ - x^-$$

- Rayon

$$r([x]) = \frac{x^+ - x^-}{2}$$

- Centre

$$m([x]) = \frac{x^+ + x^-}{2}$$

Concepts de base : les quatre opérations

- Addition

$$[x] + [y] = [x^- + y^-, x^+ + y^+]$$

- Soustraction

$$[x] - [y] = [x^- - y^+, x^+ - y^-]$$

- Multiplication

$$[x] \cdot [y] = [\min(a), \max(a)], \quad a = (x^- y^-, x^- y^+, x^+ y^-, x^+ y^+)$$

- Division

$$[x] / [y] = [x] \cdot [\frac{1}{y^+}, \frac{1}{y^-}], \quad \text{if } 0 \notin [y]$$

- Interval counterpart $[f]^*$ of f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ satisfies

$$[f]^*([x]) = [\{ f(x) : x \in [x] \}]$$

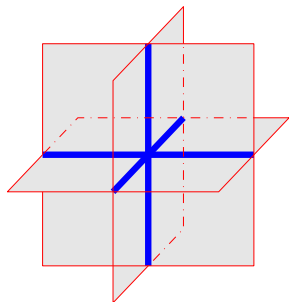
- Fonctions non monotones

$$[\exp]^*([x]) = [\exp(x^-), \exp x^+]$$

$$[\log]^*([x]) = [\log(x^-), \log x^+]$$

Boîte : une boîte, ou vecteur intervalle $[x] \in \mathbb{R}^n$ résulte du produit Cartésien de n intervalles, i.e. un vecteur à composantes intervalle :

$$[x] = [x_1^-, x_1^+] \times \dots \times [x_n^-, x_n^+]$$



$$x_1 = [2, 3]$$

$$x_2 = [1, 2]$$

$$x_3 = [12, 13]$$

Fonctions non monotones élémentaires : exemple

$$[x]^2 = \begin{cases} [x^{+2}, x^{-2}] & \text{if } \forall x \in [x], x \leq 0 \\ [0, \max(x^{-2}, x^{+2})] & \text{if } 0 \in [x] \\ [x^{-2}, x^{+2}] & \text{if } \forall x \in [x], x \geq 0 \end{cases}$$

$$|[x]| = \begin{cases} [x] & \text{if } \forall x \in [x], x \leq 0 \\ [0, \max(-x^{-}, x^{+})] & \text{if } 0 \in [x] \\ [-x^{+}, -x^{-}] & \text{if } \forall x \in [x], x \geq 0 \end{cases}$$

Fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

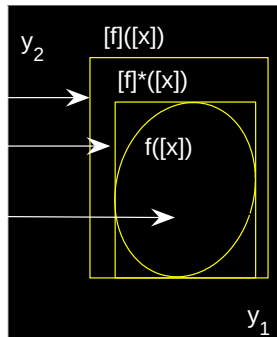
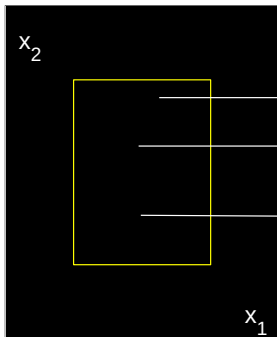
Fonction d'inclusion : $[f]$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$[f] : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$
$$\forall [x] \in \mathbb{R}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

$[f]$ peut être définie par une expression analytique, par un algorithme de calcul, une équation différentielle. Pour la même fonction, une infinité de fonctions inclusion peut être définie.

Fonction d'inclusion

$$[f] : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2.$$



$[f]$ est minimale si $[f]([x])$ est la plus petite boîte qui contienne $f([x])$. $[f]$ est monotone si $([x] \subset [y]) \implies [f]([x]) \subset [f]([y])$

Différentes formes d'une fonction intervalle

Quatre expressions formelles d'une même fonction

$$f_1(x) = x^2 - x + 1$$

$$f_2(x) = x \times x - x + 1$$

$$f_3(x) = x(x - 1) + 1$$

$$f_4(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

alors que le domaine de variation de f dans $[0, 2]$ est $[3/4, 3]$.

$$f_1([0, 2]) = [0, 2]^2 - [0, 2] + 1 = [-1, 5]$$

$$f_2([0, 2]) = [0, 2].[0, 2] - [0, 2] + 1 = [-1, 5]$$

$$f_3([0, 2]) = [0, 2].([0, 2] - 1/2) + 1 = [-1, 3]$$

$$f_4([0, 2]) = ([0, 2] - 1/2)^2 + 3/4 = [0, 3]$$

Sous-distributivité

$$\forall [x], [y], [z] \quad [x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z]$$

Monotonie

$$y \subseteq x \Rightarrow f(y) \subseteq f(x)$$

Conséquence : splitting

$$\bigcup_{i=1}^p x_i = x, \quad x_i \cap_{i \neq j} x_j = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^p f(x_i) \subseteq f(x)$$

Exemple

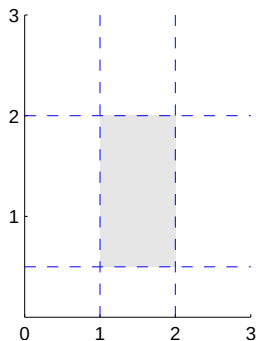
$$[x] = [-1, 1] \quad [y] = [1, 2] \quad [z] = [-3, -2]$$
$$[x] \cdot ([y] + [z]) = [-2, 2] \quad \text{and} \quad [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z] = [-5, 5]$$

Fonction d'inclusion : exemple

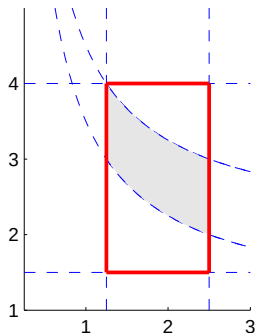
$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & x_1 + x_2 \\ y_2 & = & \frac{2.5}{x_1} \end{array}$$

$$x_1 \in [0.5, 2]$$

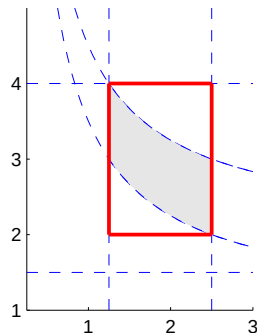
$$x_2 \in [1, 2]$$



$\{x_2, x_1\}$ domaine



$\{y_2, y_1\}$ domaine



$\{y_2, y_1\}$ domaine

Fonction d'inclusion : d'où viennent les problèmes ?

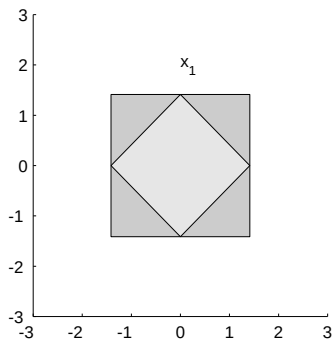
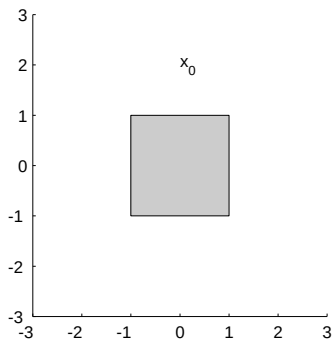
- En fait, dans $f_1(x) = x^2 - x + 1$, il y a deux occurrences de x qui sont traitées de façon complètement indépendante.
- Une source majeur de pessimisme :
 $[x] - [x]$ n'est pas égal à $[0, 0]$
- En fait :
$$\begin{aligned}[x] - [x] &= [x^-, x^+] - [x^-, x^+] \\ &= [x^- - x^+, x^+ - x^-]\end{aligned}$$
- Sous-distributivité :
$$\begin{aligned}[x].([x] - 1) &\subset [x].[x] - [x] \\ [x].([x] - 1) &= [-2, 2] \\ [x].[x] - [x] &= [-2, 4]\end{aligned}$$

- L'effet de "Wrapping" : surestimation, par un vecteur, de l'image d'un vecteur intervalle (cette image n'est pas, en général, un vecteur).
- Le problème de dépendance : provient des occurrences multiples d'une même variable pendant l'évaluation intervalle d'une expression.

Effet d'enveloppement : "wrapping"

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} [-1 \ 1] \\ [-1 \ 1] \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} [-1 \ 1] + [-1 \ 1] \\ -[-1 \ 1] + [-1 \ 1] \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} [-1 \ 1] \\ [-1 \ 1] \end{pmatrix}$$



$$[y_1] = [x_1] - [x_2]$$

$$[y_2] = 2 \cdot [x_1]$$

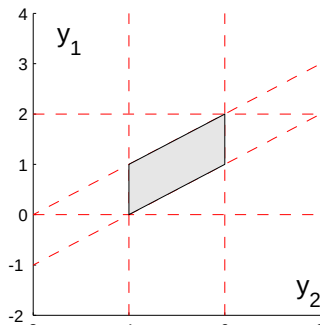
$$[y_2] - 2 \cdot [y_1] = 2 \cdot [x_2]$$

$$x_1 \in [2, 3]$$

$$x_2 \in [1, 2]$$

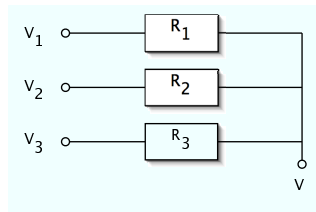
$$y_1 \in [0, 2]$$

$$y_2 \in [4, 6]$$



- Méthodes de sous-pavage
- Développement en série de Taylor
- Recherche d'opérateurs contractants

Fonction d'inclusion : le théorème de Millman



$$E_1 = 24, E_2 \in [10, 12]$$

$$E_3 \in [4, 6], R_1 \in [10, 12]$$

$$R_2 = 5, R_3 \in [16, 18]$$

$$V = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$[V] = \frac{\frac{[E_1]}{[R_1]} + \frac{[E_2]}{[R_2]} + \frac{[E_3]}{[R_3]}}{\frac{1}{[R_1]} + \frac{1}{[R_2]} + \frac{1}{[R_3]}}$$

$$V \in [11.64, 15.27]$$

Quelques références

- R.E. Moore. Interval analysis. Prentice-Hall, 1966.
- A. Neumaier. Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, 1990.
- A. Alefeld and J. Herzberger. Introduction to interval computations. Academic Press, 1983.
- V. Kreinovich. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- L. Jaulin et al. Applied interval analysis. Springer-Verlag, 2001.
- N. Revol. Reliable and accurate solutions of linear and nonlinear systems, Siam conference, 2002.
- INTLAB for MATLAB
- Interval computation WWW entry point :
<http://cs.utep.edu/interval-comp/main.html>

Quelques domaines d'applications

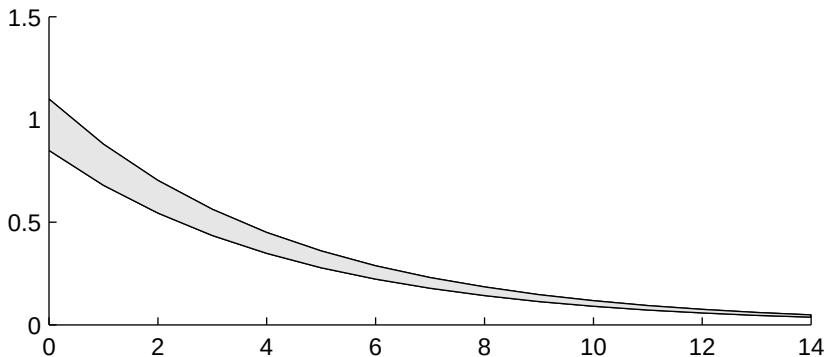
- Process design and flowsheeting
- Resolution of AC network equations
- Hurwitz stability
- Sensitivity analysis in geographic informationn system
- Data validation and diagnosis
- Quality control in manufacturing processes
- Process identification
- ...

Exemples introductifs

Système du premier ordre

$$\dot{y}(t) = -y(t), \quad y(0) \in [0.9, 1.1]$$

$$[y(t)] = [y_0] e^{-t} \Rightarrow y(t) \in [0.9e^{-t}, 1.1e^{-t}]$$



Un exemple plus difficile

$$y(k+1) = ay(k), \quad y(0) \in [0.9, 1.1], \quad a \in [0.8, 0.9]$$

$$[y(k)] = [y(0)] [a]^k$$

$$y(k) \in [?, ?]$$

Un exemple difficile

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Kx(t)$$

$$K \in -[0.6, 0.7]$$

$$T \in [0.4, 0.5]$$

$$y(0) \in [0.9, 1.1]$$

Système dynamique incertain

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= a_k y_k + u_k, & a_k &\in [a_{min}, a_{max}] \\a_k &= a_c + \delta \nu_k, & |\nu_k| &\leq 1 \\a_c &= \frac{1}{2}(a_{min} + a_{max}) \\ \delta &= \frac{1}{2}(a_{max} - a_{min})\end{aligned}$$

Objectif

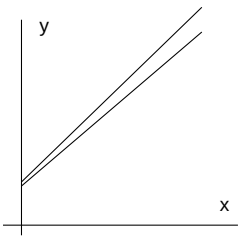
Calculer toutes les trajectoires possibles

Type de solution ?

Expression analytique

Solution numérique

Caractéristique d'un capteur incertain



$$y = g \cdot x + h$$

$$g = 2 + \delta_g, \quad |\delta_g| \leq 0.1$$

$$h = 4 + \delta_h, \quad |\delta_h| \leq 0.3$$

Approche directe

$$1.9 \leq g \leq 2.1$$

$$1.9 x \leq g \cdot x \leq 2.1 x$$

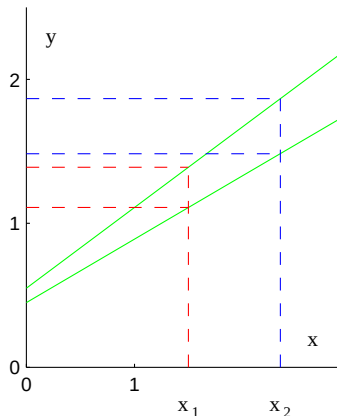
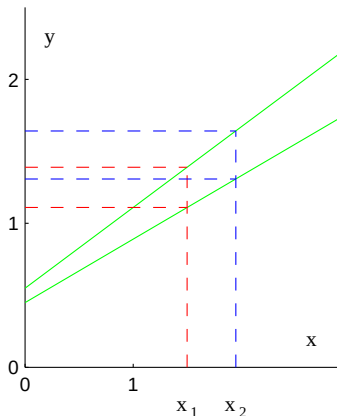
$$3.7 \leq h \leq 4.3$$

$$1.9 x + 3.7 \leq y \leq 2.1 x + 4.3$$

$$\frac{y - 4.3}{2.1} \leq x \leq \frac{y - 3.7}{1.9}$$

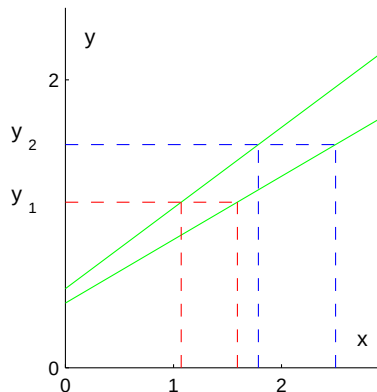
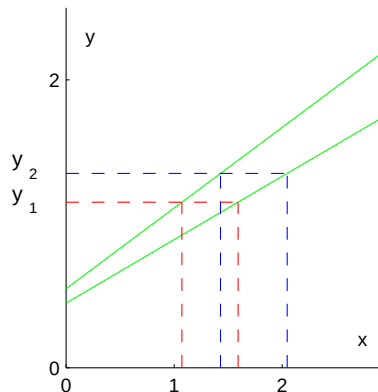
Exemple introductif : réponse d'un capteur

Capteur à caractéristique incertaine



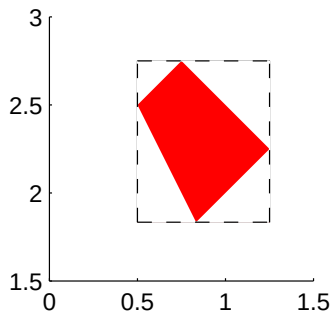
- On mesure x_1 , selon l'état du capteur, on obtient une valeur y_1 qui appartient à un intervalle I_1
- On mesure x_2 , selon l'état du capteur, on obtient la valeur y_2 qui appartient à un intervalle I_2
- Les mesures intervalle sont-elles différentes ?

Exemple introductif : inverse de la réponse d'un capteur



- Deux mesures différentes y_1 and y_2 ont été obtenues
- Quels sont les états qui ont été mesurés ?

$$\begin{pmatrix} [1, 2] & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ [1, 2] \end{pmatrix}$$



Remarque : la solution peut être obtenue par l'union convexe de solutions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ajustement par moindres carrés

$$y = Xa + \varepsilon, \quad \varepsilon \simeq N(0, I)$$
$$a = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Estimation intervalle

$$[a] = (X^T X)^{-1} X^T [y]$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} [3.9 & 4.0] \\ [2.0 & 2.2] \\ [0.9 & 1.1] \end{pmatrix} \Rightarrow [a] = \begin{pmatrix} [0.87 & 1.03] \\ [1.95 & 2.20] \end{pmatrix}$$

Exact solution is sometime difficult to obtain !

$$\begin{pmatrix} [\theta] & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\theta] = [1.8 \ 2.1]$$

$$a = \frac{1}{[\theta]^2 + 2} \begin{pmatrix} 2([\theta] + 1) \\ 2[\theta]^2 - [\theta] + 6 \end{pmatrix}$$

Système non-linéaire : résolution par itération directe

$$x + y = 7$$

$$xy = 10$$

$$[x] = [x] \cap (7 - [y])$$

$$[y] = [y] \cap (7 - [x])$$

$$[x] = [x] \cap (10/[y])$$

$$[y] = [y] \cap (10/[x])$$

x^-	x^+	y^-	y^+
1	3	3	10
1.667	2.5	4.0	6.0
1.875	2.222	4.5	5.333
...			
1.997	2.006	4.985	5.008

Modèle

$$y = x^T \theta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Mesures avec erreurs additives sur y

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{x}_k = x_k \\ \tilde{y}_k = y_k + e_{y_k}, \quad |e_{y_k}| \leq \delta_y \end{array} \right\} k = 1..N$$

Objectif

- à partir des mesures $\tilde{x}_k$ et $\tilde{y}_k$ estimer les paramètres θ et les bornes de erreurs δ_y .
- le modèle le plus fin est recherché, i.e. le modèle caractérisé par les bornes les moins conservatives.

$$\tilde{y}_k = x_k^T \theta + e_{y_k} \implies |\tilde{y}_k - x_k^T \theta| \leq \delta_y \implies \begin{aligned} \tilde{y}_k - x_k^T \theta &\leq \delta_y \\ -\tilde{y}_k + x_k^T \theta &\leq \delta_y \end{aligned}$$

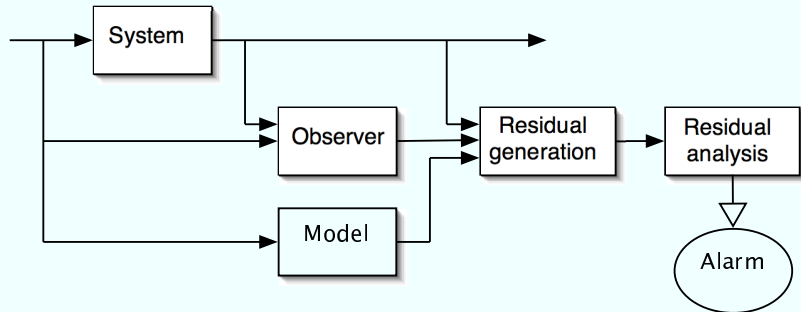
$$\begin{pmatrix} -x_1^T & -1 \\ \dots & \\ -x_N^T & -1 \\ x_1^T & -1 \\ \dots & \\ x_N^T & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \delta_y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -\tilde{y}_1 \\ \dots \\ -\tilde{y}_N \\ \tilde{y}_1 \\ \dots \\ \tilde{y}_N \end{pmatrix}$$

- Plus généralement, l'identification consiste à déterminer l'ensemble des paramètres consistant avec les mesures et les bornes du bruit ou des perturbations.

Pourquoi utiliser des modèles de type intervalle

- System characterisation only produces approximation structure of models
- System identification only produces approximate values of the parameters
- The real system is non stationnary along the time

Détection de défaut à base de modèle



Modèle du système

$$y_k = Mu_k + Ff_k + Ww_k$$

Forme générique d'un résidu idéal

$$r_k = Au_k + By_k$$

$$r_k = 0 \quad \text{when} \quad f_k = 0 \quad \text{and} \quad w_k \neq 0$$

$$r_k \neq 0 \quad \text{when} \quad f_k \neq 0 \quad \text{and} \quad \left| \frac{\partial r_k}{\partial f_k} \right| \gg \left| \frac{\partial r_k}{\partial w_k} \right|$$

Comment choisir les matrices A et B ?

$$\begin{aligned}r_k &= Au_k + By_k \\&= Au_k + B(Mu_k + Ff_k + Ww_k) \\&= (A + BM)u_k + BFf_k + BWw_k\end{aligned}$$

La solution "idéale" $A + BM = 0$ permet de définir les deux formes du résidu :

$$\begin{aligned}r_k &= B(y_k - Mu_k) \\r_k &= BFf_k + BWw_k\end{aligned}$$

Un problème difficile de sensibilité : $|BF| \geq |BW|$?

Détection de défauts : systèmes à paramètres incertains

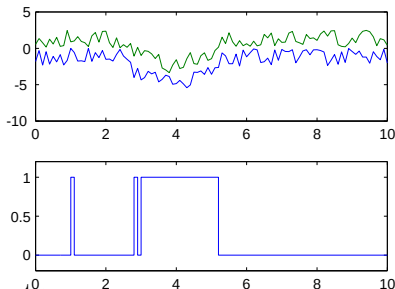
- Résidus intervalle avec erreur de modélisation :

$$[r_k] = [B](y_k - [M]u_k)$$

- Test

Si $0 \in [r_k]$, alors présence d'un défaut

Si $0 \notin [r_k]$, alors présence d'un défaut



- Problème de localisation de défauts
isoler les composantes nulles de r_k des autres
- Le couplage entre les résidus a été négligé
 $\implies$ non détection

- Modèle

$$x_3 - x_1 - x_2 = 0$$

$$x_4 - x_1 - 2x_2 = 0$$

- Mesures $y_i = x_i + \eta_i, \quad i = 1..4, \quad |\eta_i| \leq 1$

- Estimation d'état

$$x_i = y_i - \eta_i$$

$$[x_i] = y_i + [-1 \ 1]$$

- Résidus

$$[r_1] = [x_3] - [x_1] - [x_2]$$

$$[r_2] = [x_4] - [x_1] - 2[x_2]$$

- Analyse des résidus

- Modèle

$$\begin{aligned}[M]x &= 0 \\ y &= [D]x\end{aligned}$$

- Estimation d'état

$$[x] = [D]^{-1}y$$

- Résidus

$$\begin{aligned}[r] &= [M][x] \\ &= [M][D]^{-1}y\end{aligned}$$

Détection de défauts : modèle de type ARX

- Model

$$y_{k+1} = ay_k + bu_k + f_k$$

- Equation de mesure

$$\tilde{y}_k = y_k + e_k, \quad |e_k| \leq \delta$$

u est supposée parfaitement connu

- Génération de résidus

$$\begin{aligned} r_k &= \tilde{y}_{k+1} - a\tilde{y}_k - bu_k - e_{k+1} + ae_k \\ &= f_k \end{aligned}$$

Résidus intervalle : $r_k \in [r_k^-, r_k^+]$

$$r_k^- = \tilde{y}_{k+1} - a\tilde{y}_k - bu_k - (a+1)\delta$$

$$r_k^+ = \tilde{y}_{k+1} - a\tilde{y}_k - bu_k + (a+1)\delta$$

Analyse des résidus : $0 \in [r_k^-, r_k^+]$?

- Modèle

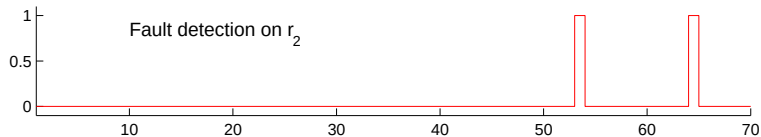
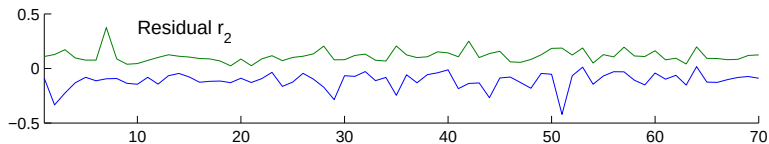
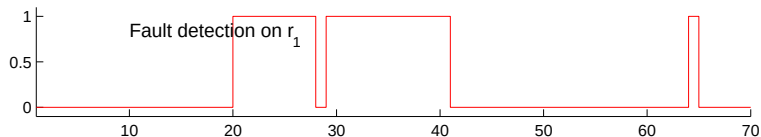
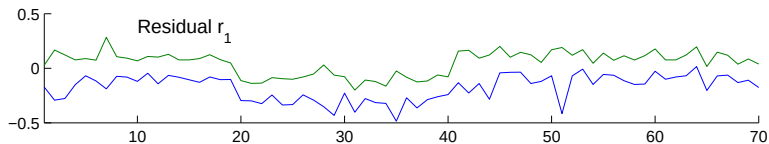
$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B(\eta_k)u_k \\ y_k &= Cx_k + Df_k\end{aligned}$$

- Génération de résidus

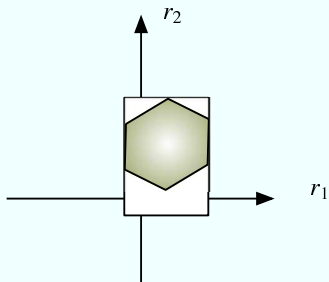
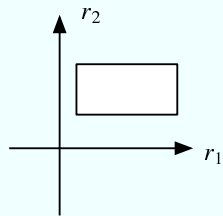
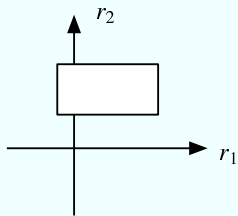
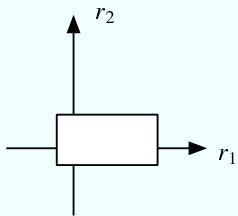
$$\begin{aligned}x_k &= C^{-1}(y_k - Ff_k) \\ C^{-1}(y_{k+1} - Ff_{k+1}) &= AC^{-1}(y_k - Ff_k) + B(\eta_k)u_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_k &= C^{-1}y_{k+1} - AC^{-1}y_k - B(\eta_k)u_k \\ r_k &= C^{-1}Ff_{k+1} - AC^{-1}Ff_k\end{aligned}$$

Détection de défauts : équation d'état



Détection de défauts : équation d'état



Application à la réconciliation de données

Modèle

$$x_1^* - x_2^* - x_3^* = 0$$

Mesures intervalle

$$x_1 = x_1^* + e_1, \quad x_1 = 16, \quad |e_1| \leq 2$$

$$x_2 = x_2^* + e_2, \quad x_2 = 13, \quad |e_2| \leq 1$$

$$x_3 = x_3^* + e_3, \quad x_3 = 4.5, \quad |e_3| \leq 1.5$$

Contraintes sur les estimées

$$14 \leq \hat{x}_1 \leq 18$$

$$12 \leq \hat{x}_2 \leq 14$$

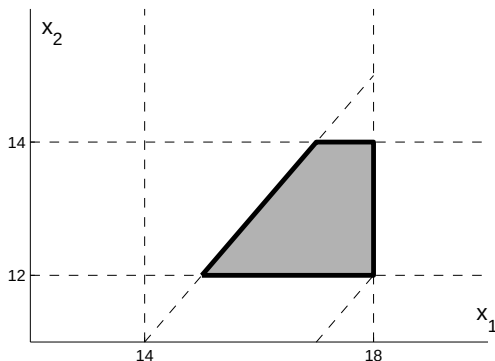
$$3 \leq \hat{x}_3 \leq 6$$

Application à la réconciliation de données

$$14 \leq \hat{x}_1 \leq 18$$

$$12 \leq \hat{x}_2 \leq 14$$

$$3 \leq \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \leq 6$$



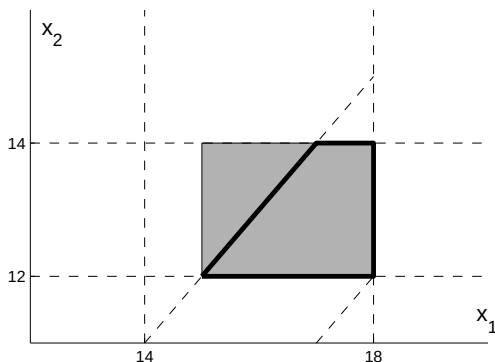
Domaine exact des solutions (coordonnées $\hat{x}_1, \hat{x}_2$)

Réconciliation de données : approximation extérieure

$$14 \leq \hat{x}_1 \leq 18$$

$$12 \leq \hat{x}_2 \leq 14$$

$$3 \leq \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \leq 6$$



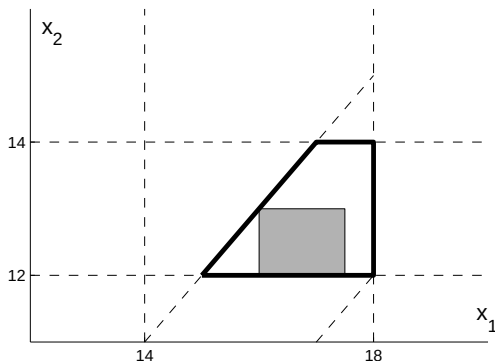
Approximation extérieure du domaine exact (coordonnées $\hat{x}_1, \hat{x}_2$)

Réconciliation de données : approximation intérieure

$$14 \leq \hat{x}_1 \leq 18$$

$$12 \leq \hat{x}_2 \leq 14$$

$$3 \leq \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \leq 6$$



Approximation intérieure du domaine exact (coordonnées $\hat{x}_1, \hat{x}_2$)

Réconciliation de données : meilleure approximation intervalle intérieure

Formulation

$$\hat{x}_3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 = 0 \}$$

$$x_i^- \leq \hat{x}_i \leq x_i^+, \quad i = 1..3$$

Approximation par la boîte la plus fine

$$\hat{x}_i = x_{c,i} + \lambda_i v_i, \quad \lambda_i > 0, \quad |v_i| \leq 1, \quad i = 1..3$$

Réconciliation de données : meilleure approximation intervalle intérieure

$$\left. \begin{array}{l} x_1^- \leq x_{c1} + \lambda_1 v_1 \leq x_1^+ \\ x_2^- \leq x_{c2} + \lambda_2 v_2 \leq x_2^+ \\ x_3^- \leq x_{c1} + x_{c2} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \leq x_3^+ \\ |v_1| \leq 1, \quad |v_2| \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{c1} + \lambda_1 - x_1^+ \leq 0 \\ -x_{c1} + \lambda_1 + x_1^- \leq 0 \\ x_{c2} + \lambda_1 - x_2^+ \leq 0 \\ -x_{c2} + \lambda_1 + x_2^- \leq 0 \\ x_{c1} + x_{c2} + \lambda_1 + \lambda_2 - x_3^+ \leq 0 \\ -x_{c1} - x_{c2} + \lambda_1 + \lambda_2 + x_3^- \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, x_{c1}, x_{c2}$$

Réconciliation de données : meilleure approximation intervalle intérieure

Formulation

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}_3 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2 = 0 \\ \hat{x}_4 - \hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$x_i^- \leq \hat{x}_i \leq x_i^+, \quad i = 1..4$$

Finest inner box approximation

$$\hat{x}_i = x_{c,i} + \lambda_i v_i, \quad \lambda_i > 0, \quad |v_i| \leq 1, \quad i = 1..4$$

Réconciliation de données : meilleure approximation intérieure

$$\left. \begin{array}{l} x_1^- \leq x_{c1} + \lambda_1 v_1 \leq x_1^+ \\ x_2^- \leq x_{c2} + \lambda_2 v_2 \leq x_2^+ \\ x_3^- \leq x_{c1} + x_{c2} + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \leq x_3^+ \\ x_4^- \leq x_{c1} + 2x_{c2} + \lambda_1 v_1 + 2\lambda_2 v_2 \leq x_4^+ \\ |v_1| \leq 1, \quad |v_2| \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{c1} + \lambda_1 - x_1^+ \leq 0 \\ -x_{c1} + \lambda_1 + x_1^- \leq 0 \\ x_{c2} + \lambda_1 - x_2^+ \leq 0 \\ -x_{c2} + \lambda_1 + x_2^- \leq 0 \\ x_{c1} + x_{c2} + \lambda_1 + \lambda_2 - x_3^+ \leq 0 \\ -x_{c1} - x_{c2} + \lambda_1 + \lambda_2 + x_3^- \leq 0 \\ x_{c1} + 2x_{c2} + \lambda_1 + 2\lambda_2 - x_4^+ \leq 0 \\ -x_{c1} - 2x_{c2} + \lambda_1 + 2\lambda_2 + x_4^- \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, x_{c1}, x_{c2}$$

Observateur intervalle : cas scalaire

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= [a].x_k + bu_k, & x_0 \\ y_k &= [c]x_k\end{aligned}$$

A chaque instant, les valeurs de a et c sont inconnues, mais leurs bornes sont connues. Simulation need to be done considering state as an interval :

$$\begin{aligned}[x_{k+1}] &= [a].[x_k] + [b].u_k \\ [y_k] &= [c].[x_k]\end{aligned}$$

Si $[a]$ is positif, les deux bornes sont définies par :

$$\begin{cases} x_{k+1}^- &= \frac{1}{2}x_k^- ((a^- + a^+) - (a^+ - a^-)\text{sgn}(x_k^-)) \\ x_{k+1}^+ &= \frac{1}{2}x_k^+ ((a^- + a^+) + (a^+ - a^-)\text{sgn}(x_k^+)) \end{cases}$$

Observateur intervalle : cas non linéaire général

$$\text{Système } S : \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, v_k) \\ y_k = h(x_k) + w_k \end{cases}$$

Perturbation bornée

$$|v_k| \leq \delta_v \quad |w_k| \leq \delta_w$$

Ensemble des sorties admissibles à l'instant k sur la base des mesures y_k

$$\mathcal{D}_{y,k} = \{y : |y - y_k| < \delta_y\}$$

Ensemble des états prédits à l'instant $k+1$ sur la base des mesures jusque l'instant k

$$\mathcal{D}_{x,k}^+ = \{f(x_k, u_k, v_k) : x \in \mathcal{D}_{x,k}, |v_k| \leq \delta_v\}$$

Ensemble des état admissibles à l'instant k based on the measurement y_k

$$\mathcal{D}_{x,k}^y = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \in \mathcal{D}_{y,k}\}$$

Observateur intervalle. Exemple : système du premier ordre

Modèle

$$x_{k+1} = [0.5 \ 0.6]x_k + 0.5, \quad x_0 \in [0.2 \ 0.3]$$

$$y_k = x_k + w_k, \quad w_k \in [-0.05, 0.05]$$

Domaine d'état initial : $\mathcal{D}_{x,0} = [0.2, 0.3]$

Mesures : $y_1 = 0.60$

Etat prédit à l'instant (1) : $\mathcal{D}_{x,0}^+ = [0.5 \ 0.6][.2 \ 0.3] + 0.5 = [0.60 \ 0.68]$

Etat estimé à l'instant (1) : $\mathcal{D}_{x,1}^y = [0.55 \ 0.65]$

Correction : $\mathcal{D}_{x,1} = [.60 \ .65]$

Equation d'état du système

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ y_k &= g(x_k)\end{aligned}$$

Filtre intervalle

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_k^p &= f(\mathbf{X}_{k-1}, u_{k-1}) \\ \mathbf{X}_k &= \mathbf{X}_k^p \cap g^{-1}(\mathbf{Y}_k)\end{aligned}$$

$$S : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + f(y_k, v_k) \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

$$S^\mp : \begin{cases} x_{k+1}^- = Ax_k^- + f^-(y_k) + L(y_k - Cx_k^-) \\ x_{k+1}^+ = Ax_k^+ + f^+(y_k) + L(y_k - Cx_k^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_k^- = x_k - x_k^- \\ e_k^+ = x_k^+ - x_k \end{cases}$$

$$e_{k+1}^+ = (A - LC)e_k^+ + f^+(y) - f(y)$$

Système coopératif : si $A - LC > 0$ et $e^+(0) > 0$, comme $f^+ - f \geq 0$, alors e_k^+ est toujours ≥ 0 .

Observateur intervalle. Cas linéaire

Système

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (A + \Delta_k)x_k + Bu_k, \quad |\Delta_k| \leq \Delta \\y_k &= Cx_k\end{aligned}$$

Observateur

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^- \\ x_{k+1}^+ \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_k^- \\ x_k^+ \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} |x_k^-| \\ |x_k^+| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u_k$$

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A+ |A| & A- |A| \\ A- |A| & A+ |A| \end{bmatrix} \quad N = f(\Delta, S_A), \quad S_A = \text{sgn}(A)$$

Résidus

$$r_k = y_k - C[x_k^-, x_k^+]$$

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

$$A \in [A^-, A^+], \quad B \in [B^-, B^+], \quad x_0 \in [x_0^-, x_0^+]$$

- Time 1 :

$$x_1^- = \min_{x_k, A, B} (Ax_0 + Bu_0)$$

$$x_1^+ = \max_{x_k, A, B} (Ax_0 + Bu_0)$$

- Time 2 : $x_2^- = \min_{x_k, A, B} (A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1)$

$$x_2^+ = \max_{x_k, A, B} (A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1)$$

- ...

- Time k :

$$x_k^- = \min_{x_k, A, B} (A^k x_0 + A^{k-1} B u_0 + \dots + B u_{k-1})$$

$$x_k^+ = \max_{x_k, A, B} (A^k x_0 + A^{k-1} B u_0 + \dots + B u_{k-1})$$

- L'algorithme fournit l'enveloppe exacte des états
- La complexité des calculs croît avec le temps
- Le calcul en "temps réel" de l'enveloppe peut être délicat

Forme non itérative de l'observateur intervalle

Solution approchée

- Idée : utiliser une fenêtre glissante de largeur constante
- A l'instant k , les bornes de l'état sont connues :

$$x_k \in [x_k^-, x_k^+]$$

- A l'instant $k + L$:

$$x_{k+L}^- = \min_{x_k, A, B} (A^L x_k + A^{L-1} B u_k + \dots + B u_{k+L-1})$$

$$x_{k+L}^+ = \max_{x_k, A, B} (A^L x_k + A^{L-1} B u_k + \dots + B u_{k+L-1})$$

Forme itérative de l'observateur intervalle

Solution approchée

- L'intervalle $[x_{k+L}^-, x_{k+L}^+]$ est une approximation de l'enveloppe exacte.
- La largeur de fenêtre peut être adaptée en fonction d'un degré désiré de précision de calcul.
- La largeur de fenêtre peut être adaptée en fonction de la constante de temps du système.
- Comme la quantité à optimiser est exprimée sur un horizon temporel fini, le volume des calculs est limitée et peut s'effectuer en ligne.

Forme itérative de l'observateur intervalle

Application au diagnostic

Estimation de la sortie

$$y_{k+L} = C(A^L x_k + A^{L-1} B u_k + \dots + B u_{k+L-1})$$

$$\hat{y}_{k+L}^- = \min_{x_k, A, B} C(A^L x_k + A^{L-1} B u_k + \dots + B u_{k+L-1})$$

$$\hat{y}_{k+L}^+ = \max_{x_k, A, B} C(A^L x_k + A^{L-1} B u_k + \dots + B u_{k+L-1})$$

Génération de résidus

$$\tilde{y}_{k+L} = y_{k+L} - [\hat{y}_{k+L}^-, \hat{y}_{k+L}^+]$$

- Constraint satisfaction problems or CSPs are problems where one must find states that satisfy a number of constraints or criteria.
- A CSP can be formally defined by :
 - a set of variables $x_1, x_2, \dots, x_n$
 - each variable x_i has a discrete and finite set of possible values (their domain D_i),
 - a set of constraints among these variables.

The solution to a CSP is to find a value for each variable, from their respective domain, which satisfy all the constraints

Formulation

$$x \in [x], \quad y \in [y], \quad z \in [z]$$

$$z = x + y$$

$$[x] = [x] \cap ([z] - [y])$$

$$[y] = [y] \cap ([z] - [x])$$

$$[z] = [z] \cap ([x] + [y])$$

Example

$$x \in [10, 12], \quad y \in [11, 13], \quad z \in [20, 22]$$

$$z = x + y$$

$$\implies [x] = [10, 11], \quad [y] = [11, 12], \quad [z] = [21, 22]$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ y_k &= g(x_k) \\ \tilde{y}_k &= y_k + e_k, \quad |e_k| \leq \delta\end{aligned}$$

Algorithme

Initialisation : $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{k-1}$

for $\ell = 1$ to $k - 1$, $\{ \mathbf{X}_\ell = \mathbf{X}_\ell \cap f(\mathbf{X}_{\ell-1}) \cap g^{-1}(\mathbf{Y}_\ell) \}$

for $\ell = k - 1$ to 1 , $\{ \mathbf{Y}_\ell = g(\mathbf{X}_\ell), \quad \mathbf{X}_{\ell-1} = \mathbf{X}_{\ell-1} \cap f^{-1}(\mathbf{X}_\ell) \}$

Itération k : collecter les mesures $\tilde{y}_k$, ensuite :

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k \bigcap [\tilde{y}_k - \delta, \tilde{y}_k + \delta]$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k \bigcap f(\mathbf{X}_{k-1}) \bigcap g^{-1}(\mathbf{Y}_k)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{Y}_k \bigcap g(\mathbf{X}_k)$$

Modèle

$$\begin{aligned}x_{1,k+1} &= x_{1,k}x_{2,k} + u_k \\x_{2,k+1} &= -x_{1,k} + x_{2,k} - u_k \\y_k &= x_{1,k} + x_{2,k}\end{aligned}$$

Simulateur

$$\begin{aligned}z_k &= x_{1,k} \ x_{2,k} \\x_{1,k+1} &= z_k + u_k \\x_{2,k+1} &= -x_{1,k} + x_{2,k} - u_k \\y_k &= x_{1,k} + x_{2,k}\end{aligned}$$

Satisfaction de contraintes. Estimation d'état

Initialisation : u_k et y_k sont connus

$$[x_{1,k}] = [-\infty, \infty] \quad [x_{2,k}] = [-\infty, \infty] \quad [z_k] = [-\infty, \infty]$$

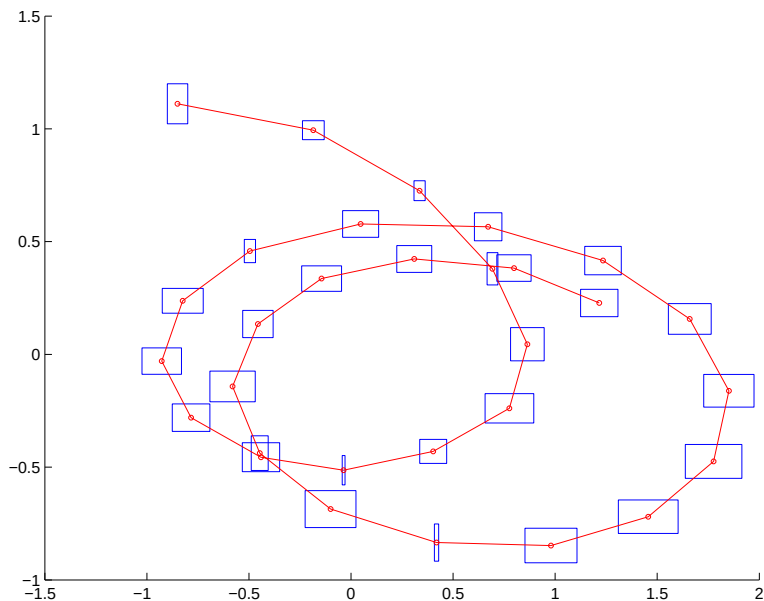
Algorithme directe : pour $k = 1$ à N

$$\begin{aligned}[z_k] &= [z_k] \cap [x_{1,k}][x_{2,k}] \\ [x_{1,k+1}] &= [x_{1,k+1}] \cap ([z_k] + [u_k]) \\ [x_{2,k+1}] &= [x_{2,k+1}] \cap (-[x_{1,k}] + [x_{2,k}] - [u_k]) \\ [y_{k+1}] &= [y_{k+1}] \cap ([x_{1,k+1}] + [x_{2,k+1}])\end{aligned}$$

Algorithme rétrograde : pour $k = N$ à 1

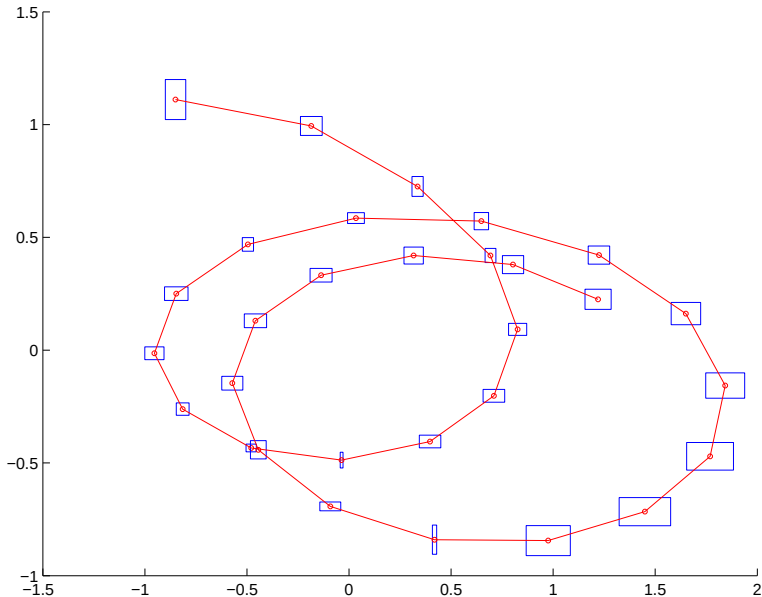
$$\begin{aligned}[x_{2,k+1}] &= [x_{2,k+1}] \cap ([y_{k+1}] - [x_{1,k+1}]) \\ [x_{1,k+1}] &= [x_{1,k+1}] \cap ([y_{k+1}] - [x_{2,k+1}]) \\ [x_{1,k}] &= [x_{1,k}] \cap (-[x_{2,k+1}] + [x_{2,k}] - [u_k]) \\ [x_{2,k}] &= [x_{2,k}] \cap ([x_{2,k+1}] - [x_{1,k}] + [u_k]) \\ [z_k] &= [x_{1,k+1}] - [u_k] \\ [x_{1,k}] &= [x_{1,k}] \cap ([z_k]/[x_{2,k}]) \\ [x_{2,k}] &= [x_{2,k}] \cap ([z_k]/[x_{1,k}])\end{aligned}$$

Satisfaction de contraintes. Estimation d'état



Phase trajectory

Satisfaction de contraintes. Estimation d'état



- An alternative to the normal probability density function
- Propagation of uncertainties is easy to perform
- Possibly use of static / dynamic / linear / nonlinear models
- Pessimism results in some situations
- Bounds estimation
- Bounds adaptation using new information