

Intégration numérique garantie d'équations différentielles ordinaires en présence d'incertitude.

Nacim Ramdani

MC HDR Université Paris 12, en délégation au CNRS
LIRMM UMR CNRS 5506 University Montpellier 2, France
<http://www.lirmm.fr/~ramdani>

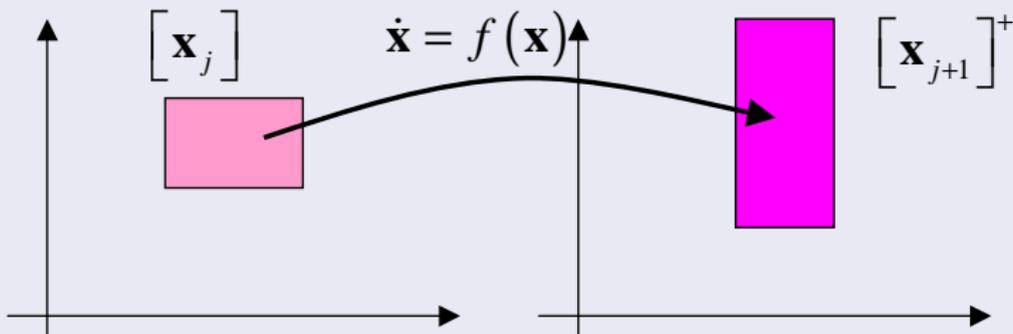
JNMACS2007, Reims
9-11/07/2007

Plan

- 1 Contexte
- 2 Méthodes intervalles
 - Modèles de Taylor intervalles
 - Autres méthodes
 - Exemples d'applications de méthodes de Taylor intervalles
- 3 Théorèmes de comparaison et inégalités différentielles
 - Systèmes dynamiques monotones
 - Systèmes dynamiques non coopératifs
 - Exemples d'applications
- 4 Conclusion et Perspectives

Simulation ensembliste de modèle à temps continu

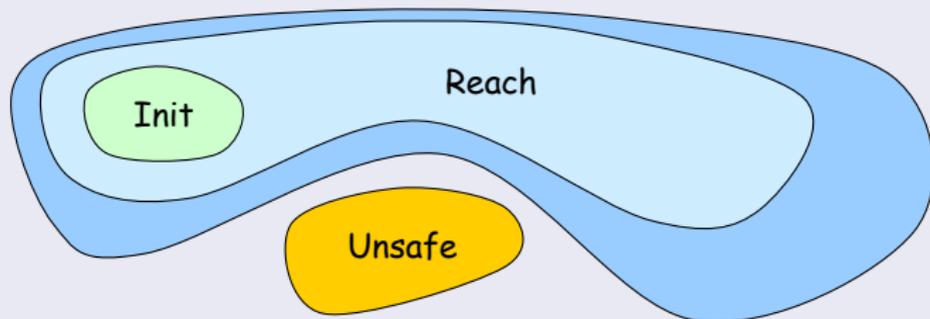
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Preuve de vérification de propriété



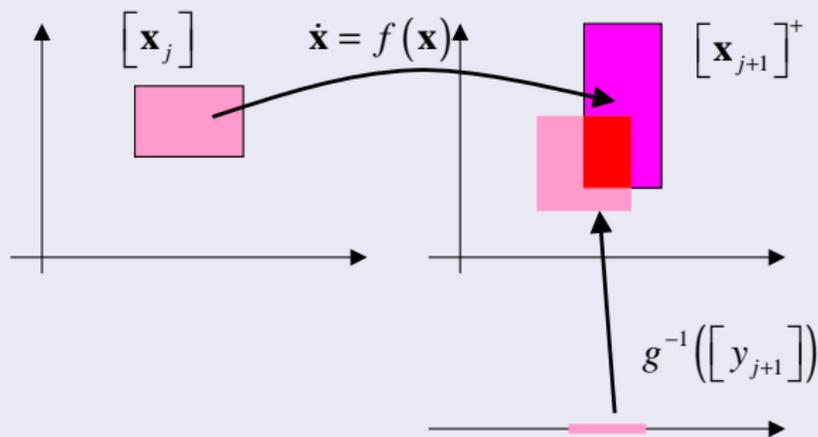
(Girard, 2006)

Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Observation ensembliste



Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) &\in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)\end{aligned}$$

Deux objectifs

- 1 Vérifier existence, unicité de la solution
- 2 Calcul de $[\mathbf{x}_j] \supseteq \mathbb{X}(t_j), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_n$

Simulation ensembliste de modèle à temps continu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}_0, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$$

Deux approches

- Encadrement de l'erreur de troncature, **Méthodes intervalles**
 - méthodes à un pas \Rightarrow modèles de Taylor intervalles
 - méthodes multi-pas \Rightarrow relaxation et propagation de contraintes
- **Théorèmes de comparaison**, théorèmes de Kamke-Müller
 - théorie des systèmes dynamiques monotones
 - automates hybrides englobants

Plan

- 1 Contexte
- 2 Méthodes intervalles
 - Modèles de Taylor intervalles
 - Autres méthodes
 - Exemples d'applications de méthodes de Taylor intervalles
- 3 Théorèmes de comparaison et inégalités différentielles
 - Systèmes dynamiques monotones
 - Systèmes dynamiques non coopératifs
 - Exemples d'applications
- 4 Conclusion et Prospectives

Développement en série de Taylor

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_j) = \mathbf{x}_j$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h^i \mathbf{f}^{[i]}(\mathbf{x}_j) + h^k \mathbf{f}^{[k]}(\mathbf{x}(t_\xi))$$

Les coefficients de Taylor

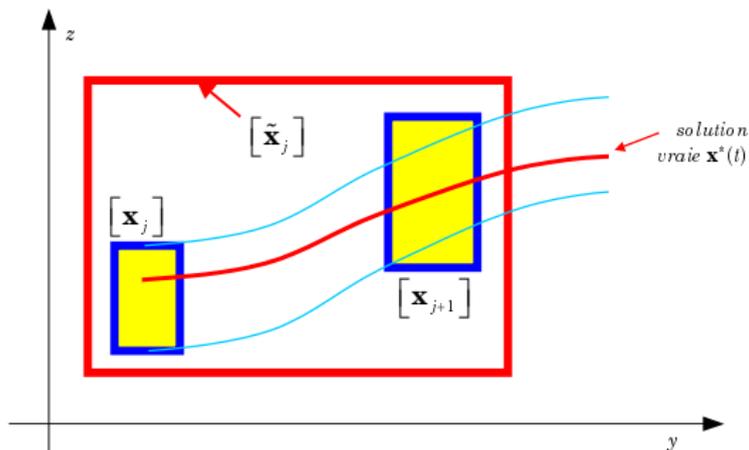
$$\mathbf{f}^{[1]} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}^{[2]} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}^{[i]} = \frac{1}{i!} \mathbf{x}^{(i)} = \frac{1}{i} \frac{d\mathbf{f}^{[i-1]}}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}, \quad i \geq 2$$

Encadrement de la trajectoire

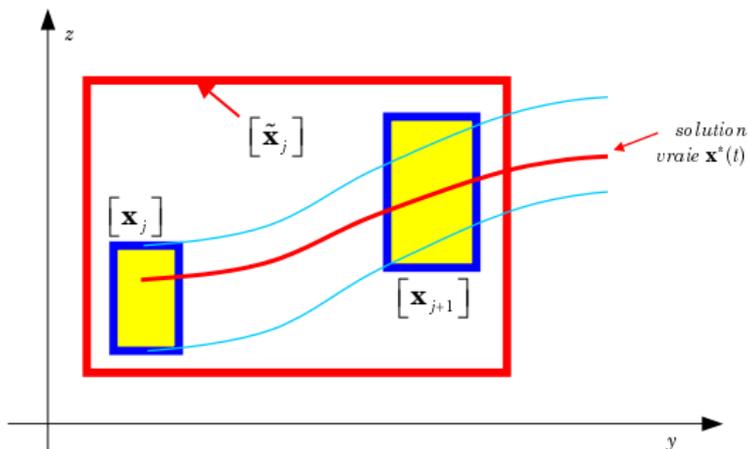
Encadrement du reste du développement en série de Taylor



$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

Encadrement de la trajectoire

Encadrement du reste du développement en série de Taylor



$$[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$$

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Expression explicite du tube de trajectoire

$$\forall t \in [t_j, t_j + h_j]$$
$$[\mathbf{x}(t)] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} (t - t_j)^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + (t - t_j)^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Existence et unicité de la solution

Théorème du point fixe de Banach

$\{\mathbb{X}, d\}$, $\Phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$.

Si Φ satisfait une condition de Lipschitz

$$d(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) \leq \gamma d(z_1, z_2)$$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{X}$, et $0 \leq \gamma < 1$, alors Φ possède un et un seul point fixe.

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

\mathbb{U} : ensemble des fonctions continues

$$\Phi(\nu(t)) = \nu_j + \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \nu(\tau)) d\tau$$

$\nu(t_j) = \nu_j$ et $\nu(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

\mathbb{U} : ensemble des fonctions continues

$$\Phi(\nu(t)) = \nu_j + \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \nu(\tau)) d\tau$$

$\nu(t_j) = \nu_j$ et $\nu(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Propriété

$$\Phi(\nu^*) = \nu^* \Leftrightarrow \dot{\nu}^*(t) = \mathbf{f}(\nu^*(t))$$

Existence et unicité de la solution

Opérateur de Picard-Lindelöf

\mathbb{U} : ensemble des fonctions continues

$$\Phi(\nu(t)) = \nu_j + \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\tau, \nu(\tau)) d\tau$$

$\nu(t_j) = \nu_j$ et $\nu(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$

Propriété

$$\Phi(\nu^*) = \nu^* \Leftrightarrow \dot{\nu}^*(t) = \mathbf{f}(\nu^*(t))$$

solution *a priori* $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$

si $\Phi([\tilde{\mathbf{x}}_j]) \subseteq [\tilde{\mathbf{x}}_j]$ alors $[\tilde{\mathbf{x}}_j] \supseteq \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_j, t_{j+1}]\}$

Existence et unicité de la solution

Algorithme (Moore, 66)(Lohner, 94)

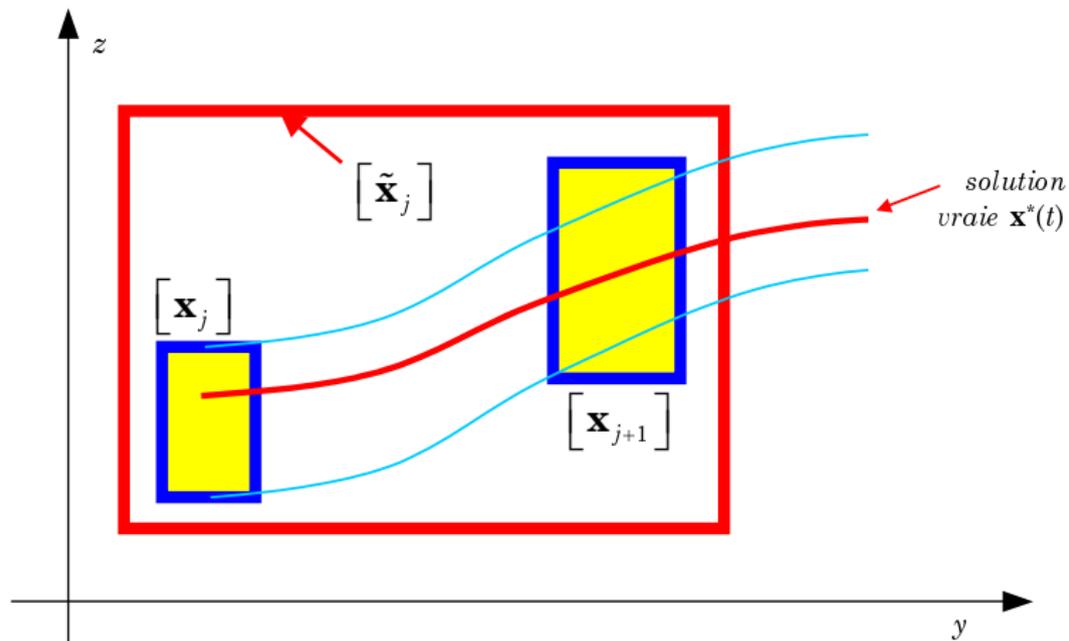
a priori enclosure (entrée : $[\mathbf{x}_j]$, h , α ; sortie : $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$)

- 1 Initialisation : $[\tilde{\mathbf{x}}_j] := [\mathbf{x}_j] + [0, h] \mathbf{f}([\mathbf{x}_j])$;
- 2 tant que $([\mathbf{x}_j] + [0, h] \mathbf{f}([\tilde{\mathbf{x}}_j]) \not\subset [\tilde{\mathbf{x}}_j])$

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{x}}_j] &:= [\tilde{\mathbf{x}}_j] + [-\alpha, \alpha] |[\tilde{\mathbf{x}}_j]| \\ h &:= h/2 \end{aligned}$$

fin

Réduction de la solution



Réduction de la solution

Forme centrée pour les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[j]}([\mathbf{x}_j]) = \mathbf{f}^{[j]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{J} \left(\mathbf{f}^{[j]}; [\mathbf{x}_j] \right) ([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

Réduction de la solution

Forme centrée pour les coefficients de Taylor

$$\mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) = \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j])([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j]) + \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j]) \right\} ([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

Réduction de la solution

Mean Value (entrée : $[\mathbf{x}_j]$, $\hat{\mathbf{x}}_j$, h_j , $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$; sortie : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $\hat{\mathbf{x}}_{j+1}$)

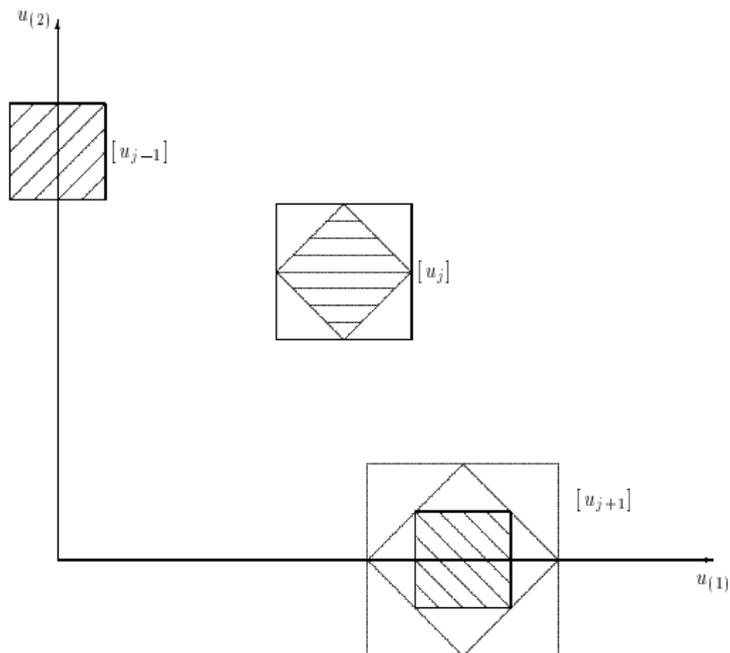
$$\textcircled{1} \quad [\mathbf{v}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \cdot \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + h_j^k \cdot \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j]);$$

$$\textcircled{2} \quad [\mathbf{S}_j] = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j]) \right\};$$

$$\textcircled{3} \quad [\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{v}_{j+1}] + [\mathbf{S}_j]([\mathbf{x}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

$$\textcircled{4} \quad \hat{\mathbf{x}}_{j+1} = m([\mathbf{v}_{j+1}])$$

Phénomène d'enveloppement

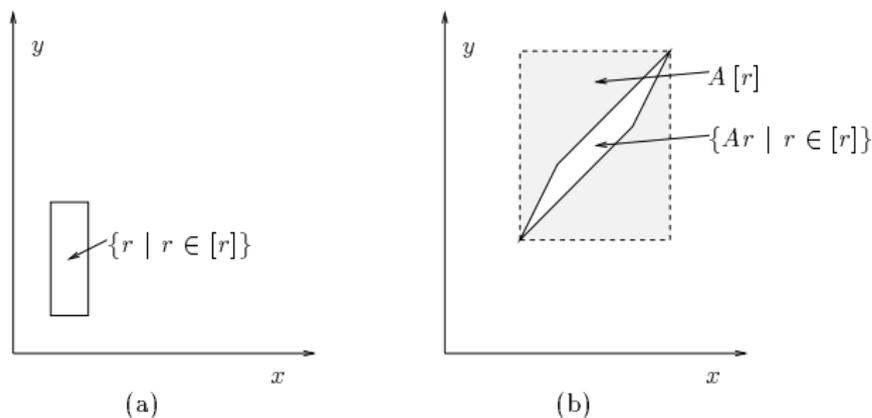


(Rihm, 1994)

Contrôle du pessimisme

Méthode de Lohner (Krückeberg, 69), (Eijgenraam, 81) (Lohner, 87)

$$[\mathbf{x}_{j+1}] = \{\hat{\mathbf{x}}_{j+1} + \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{r}_{j+1} \mid \mathbf{r}_{j+1} \in [\mathbf{r}_{j+1}]\}$$



(Nedialkov, 1999)

$$(\mathbf{A}, \mathbf{r}) := \{\mathbf{A} \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in [\mathbf{r}]\} \subseteq \mathbf{A} [\mathbf{r}] \rightarrow [\mathbf{A} [\mathbf{r}]]$$

Contrôle du pessimisme

Méthode de Lohner (Lohner, 87)

Algorithme : *Lohner's method* (entrée : h_j , $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$, $[\mathbf{x}_j]$, $[\mathbf{r}_j]$, \mathbf{A}_j ;
sortie : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $[\mathbf{r}_{j+1}]$, \mathbf{A}_{j+1})

$$\textcircled{1} [\mathbf{z}_{j+1}] = h_j^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

$$\textcircled{2} \mathbf{s}_{j+1} = m([\mathbf{z}_{j+1}])$$

$$\textcircled{3} \hat{\mathbf{x}}_{j+1} = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} h_j^i \cdot \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) + \hat{\mathbf{s}}_{j+1}$$

$$\textcircled{4} [\mathbf{S}_j] = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j]) \right\}$$

$\textcircled{5}$ choisir la matrice \mathbf{A}_{j+1}

$$\textcircled{6} [\mathbf{x}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_{j+1} + ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{r}_j] + [\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1}$$

$$\textcircled{7} [\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice \mathbf{A}_{j+1}

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) \approx \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \approx [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice \mathbf{A}_{j+1}

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) \approx \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \approx [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

- 1 La méthode parallélépipédique (Eijgenraam, 81), (Lohner, 88)

$$\mathbf{A}_{j+1} = m([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j).$$

Contrôle du pessimisme

Choix de la matrice \mathbf{A}_{j+1}

$$\Rightarrow \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) \approx \mathbf{I}$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

$$[\mathbf{r}_{j+1}] \approx [\mathbf{r}_j] + \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{z}_{j+1}] - \mathbf{s}_{j+1})$$

- ① La méthode parallélépipédique (Eijgenraam, 81), (Lohner, 88)

$$\mathbf{A}_{j+1} = m([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j).$$

- ② La méthode par factorisation QR (Lohner, 88)

- ① choisir $\tilde{\mathbf{A}}_{j+1} \in [\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j$

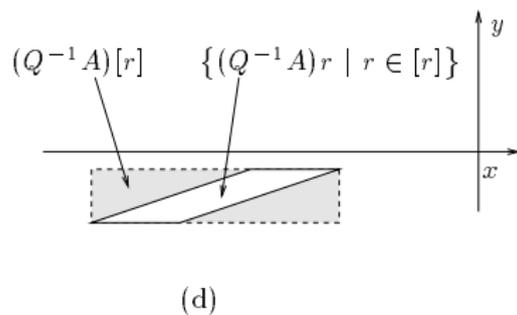
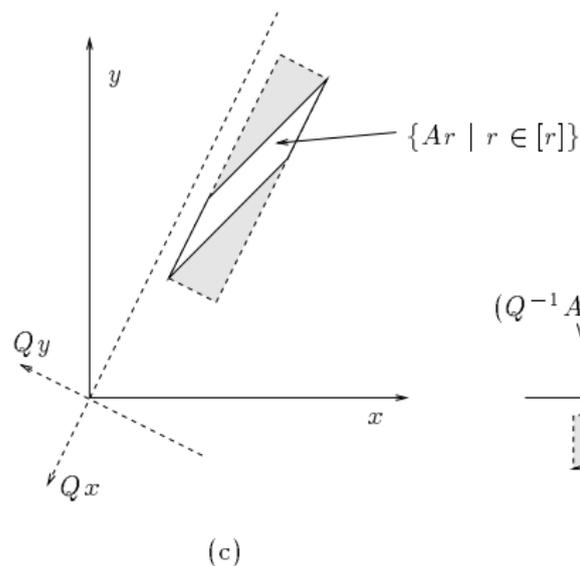
- ② permutation : $\hat{\mathbf{A}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{j+1} \mathbf{P}_{j+1}$

- ③ factorisation QR : $\hat{\mathbf{A}}_{j+1} \rightarrow \mathbf{Q}_{j+1} \mathbf{R}_{j+1}$

- ④ choisir la nouvelle matrice : $\mathbf{A}_{j+1} = \mathbf{Q}_{j+1}$

Contrôle de l'effet d'enveloppement

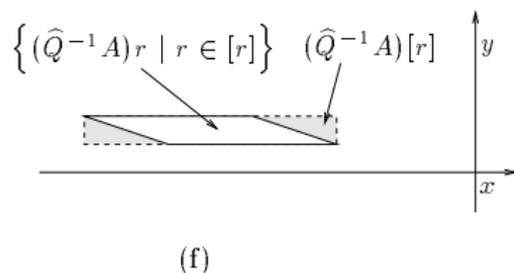
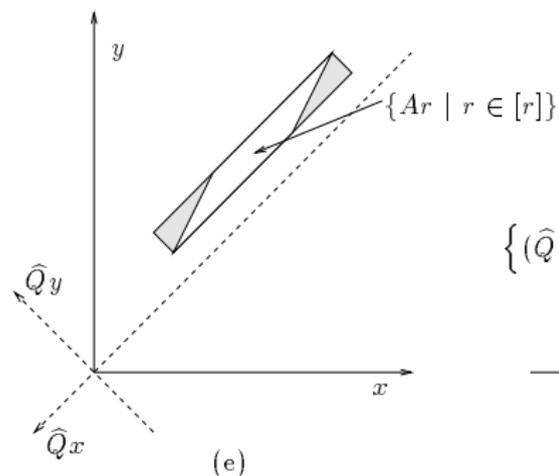
Factorisation QR sans permutation



(Nedialkov, 1999)

Contrôle de l'effet d'enveloppement

Factorisation QR avec permutation



(Nedialkov, 1999)

Méthode de Rihm (Rihm, 94)

Algorithme : *Extended Mean Value*

(entrées : $[\tilde{\mathbf{x}}_j]$, $[\mathbf{x}_j]$, $\hat{\mathbf{x}}_j$, $[\mathbf{v}_j]$, $[\mathbf{p}_j]$, \mathbf{A}_j , h_j ,

sorties : $[\mathbf{x}_{j+1}]$, $\hat{\mathbf{x}}_{j+1}$, $[\mathbf{v}_{j+1}]$, $[\mathbf{p}_{j+1}]$, \mathbf{A}_{j+1})

$$\textcircled{1} \quad [\mathbf{v}_{j+1}] = \hat{\mathbf{x}}_j + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{f}^{[i]}(\hat{\mathbf{x}}_j) h^i + \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j]) h^k$$

$$\textcircled{2} \quad [\mathbf{S}_j] = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{J}(\mathbf{f}^{[i]}; [\mathbf{x}_j]) h^i$$

$$\textcircled{3} \quad [\mathbf{q}_{j+1}] = ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{p}_j] + [\mathbf{S}_j]([\mathbf{v}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

$$\textcircled{4} \quad [\mathbf{x}_{j+1}] = [\mathbf{v}_{j+1}] + [\mathbf{q}_{j+1}]$$

$$\textcircled{5} \quad \mathbf{A}_{j+1} = m([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) \text{ ou factorisation QR}$$

$$\textcircled{6} \quad [\mathbf{p}_{j+1}] = \mathbf{A}_{j+1}^{-1} ([\mathbf{S}_j] \mathbf{A}_j) [\mathbf{p}_j] + (\mathbf{A}_{j+1}^{-1} [\mathbf{S}_j]) ([\mathbf{v}_j] - \hat{\mathbf{x}}_j)$$

$$\textcircled{7} \quad \hat{\mathbf{x}}_{j+1} = m([\mathbf{v}_{j+1}])$$

Expression explicite du domaine atteignable

Contrôle de l'effet d'enveloppement

$$\forall t \in [t_j, t_j + h_j]$$
$$[\mathbf{x}(t)] = [\mathbf{x}_j] + \sum_{i=1}^{k-1} (t - t_j)^i \mathbf{f}^{[i]}([\mathbf{x}_j]) + (t - t_j)^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_j])$$

Utilisation des méthodes de Lohner ou de Rihm ...

Autres méthodes d'intégration à un pas

- Modèles de Taylor implicites (Rihm, 1998)
- Série de Hermite-Obreshkoff (Nedialkov, 1999)

Performances

- Incertitudes numériques → Plus performantes que Taylor explicites
- Incertitudes physiques → ...

Méthode d'intégration *multi-pas*

(Janssen, Van Hentenryck et Deville 2002)

Principe

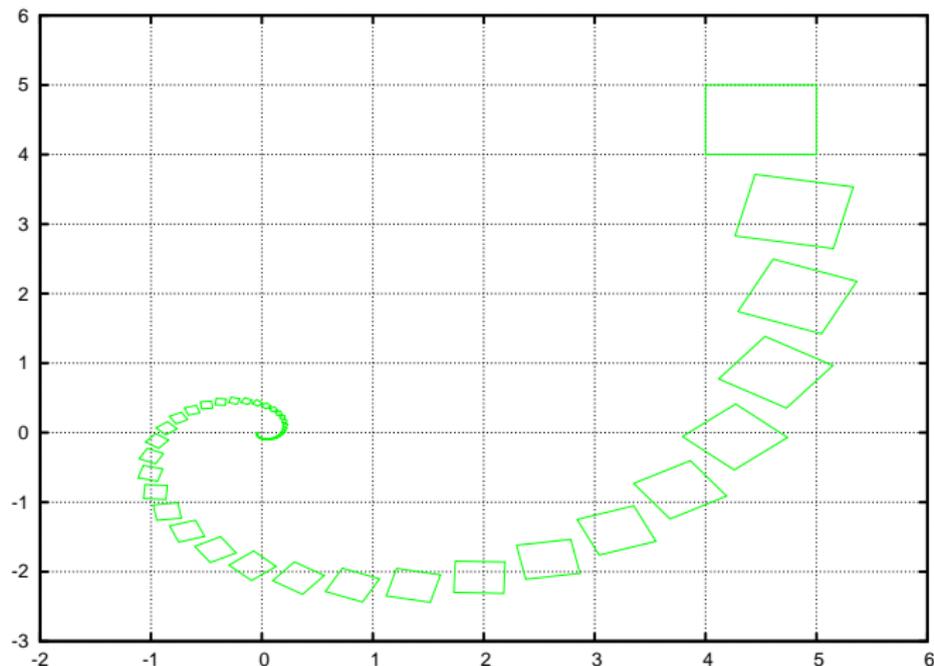
- 1 Relaxation *via* interpolation garantie par polynômes d'Hermite
- 2 Forme centrée
- 3 Filtrage global par propagation de contraintes (évaluation à pas de temps successifs)

Performances

- Incertitudes numériques → Plus performante que Taylor intervalles ou Hermite-Obreshkoff.
- Incertitudes physiques → Aucun résultat connu.

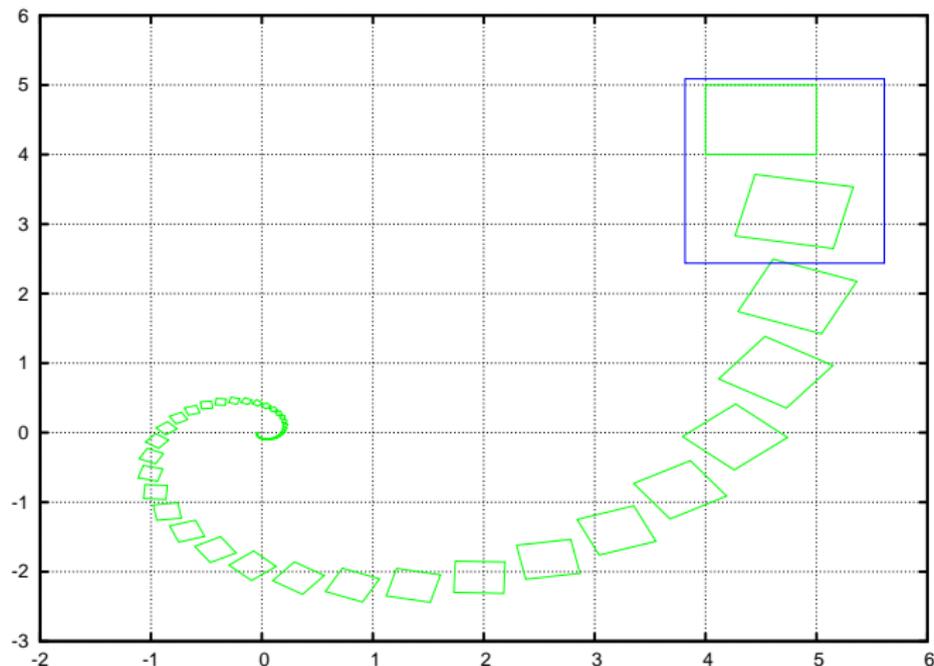
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



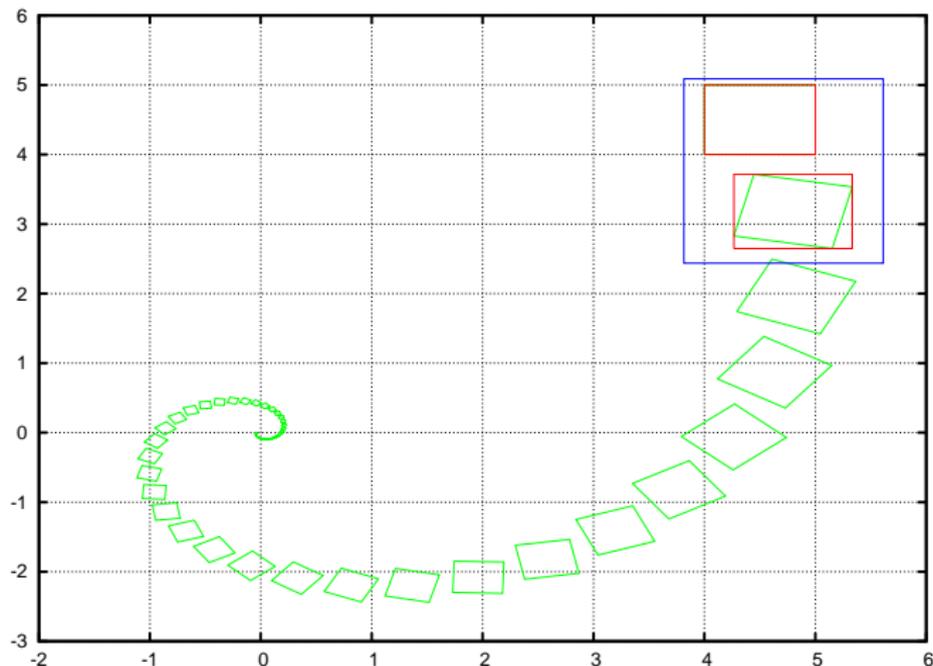
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



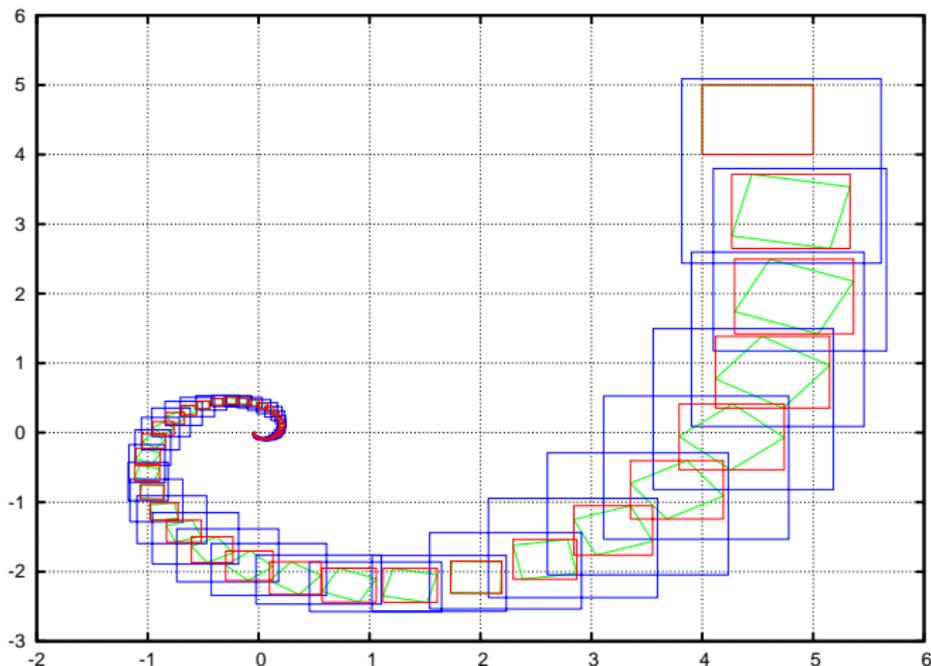
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



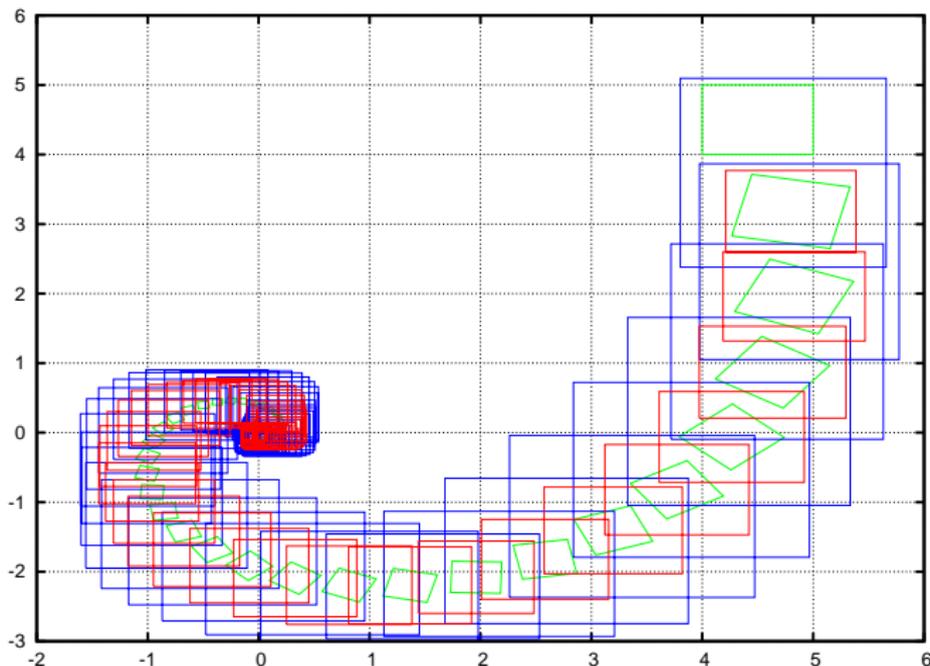
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine



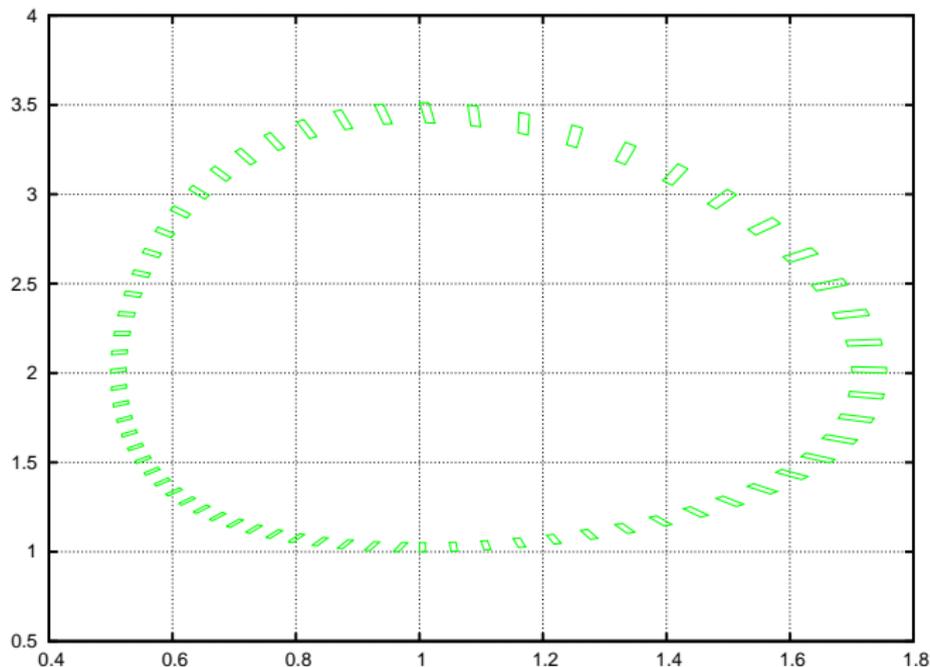
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Système affine incertain



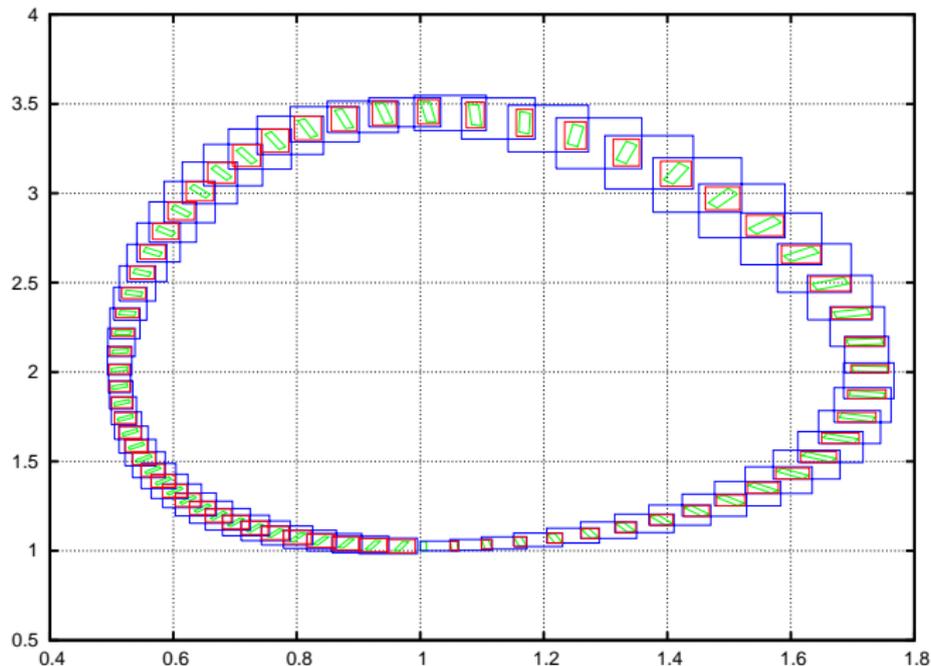
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



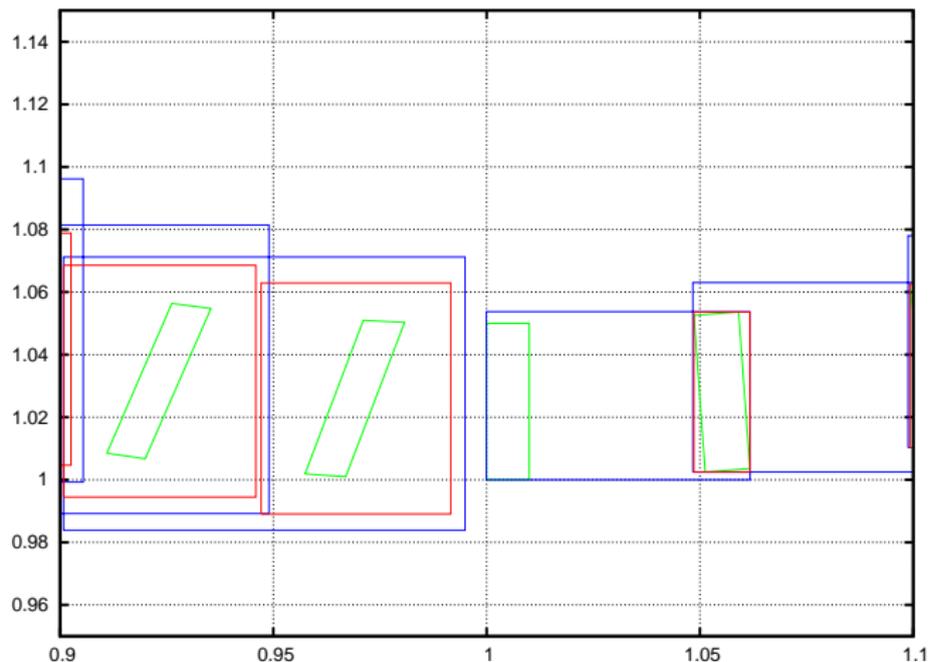
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



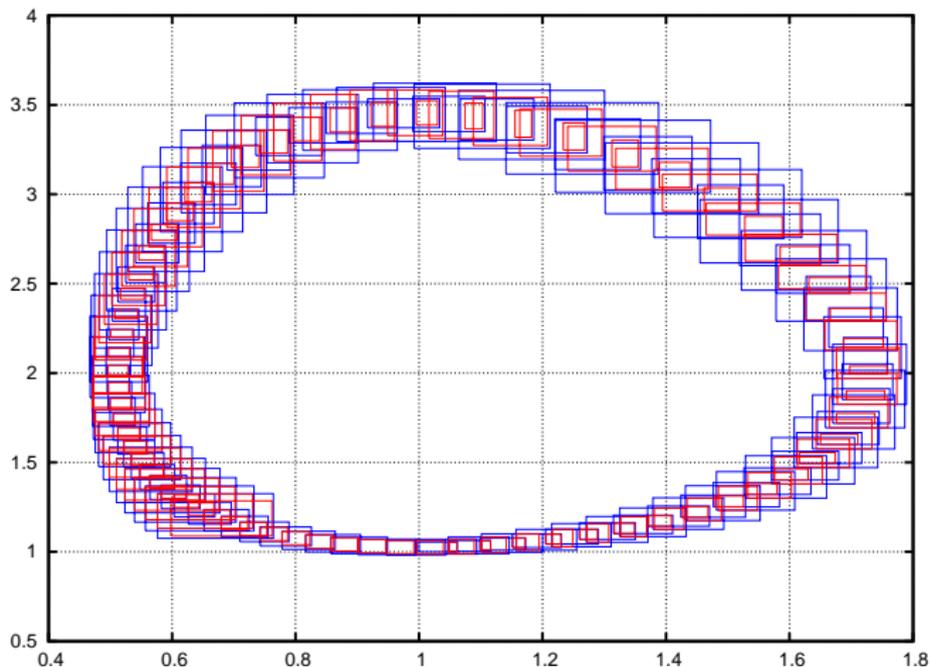
Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



Modèle de Taylor intervalle - Méthode de Rihm

Application : Lotka Volterra



Plan

- 1 Contexte
- 2 Méthodes intervalles
 - Modèles de Taylor intervalles
 - Autres méthodes
 - Exemples d'applications de méthodes de Taylor intervalles
- 3 Théorèmes de comparaison et inégalités différentielles
 - Systèmes dynamiques monotones
 - Systèmes dynamiques non coopératifs
 - Exemples d'applications
- 4 Conclusion et Prospectives

Théorie des systèmes dynamiques monotones

(Smith, 1995), (Hirsch, 2005)

Définition : Systèmes dynamiques monotones

$$\mathbf{x}(t_0) \leq \mathbf{y}(t_0) \Rightarrow \forall \mathbf{t} \geq \mathbf{t}_0 \quad \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{y}(t)$$

Definition : Système coopératif

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\{\mathbf{f}, \mathbb{X}_0\}$ est coopératif sur \mathbb{D} si

$$\forall i \neq j, t \geq 0 \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x_j} \geq 0$$

Si un système dynamique est coopératif alors il est monotone

Théorie des systèmes dynamiques coopératifs

Propriété

$\{\mathbf{f}_1, \mathbf{x}_{1,0}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}\}$ et $\{\mathbf{f}_2, \mathbf{x}_{2,0}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}\}$ coopératifs sur \mathbb{D}

$$\text{si } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}, [\mathbf{p}], t) \leq \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t)$$

$$\text{et } \mathbf{x}_{1,0} \leq \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}_{2,0}$$

$$\text{alors } \forall t \geq t_0, \quad \mathbf{x}_1(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_2(t)$$

\Rightarrow Une fonction d'inclusion $[\mathbf{x}(t)] = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)]$

Exemple de construction

(Kieffer & Walter, 2006)

Solution inférieure

Pour $k=1,\dots,p$ et $i=1,\dots,n$

$$\text{Si } \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \text{ alors } p_k = \bar{p}_k \text{ sinon } p_k = \underline{p}_k$$

Systèmes dynamiques non coopératifs

Effectuer l'intégration numérique garantie avec des intervalles dégénérés (Müller,26), (Kamke, 30), (Krasnoselskij,68), (Smith, 95), (Hirsch, 05)

Théorème de Müller (Müller,26), (Kieffer & Walter, 06)

si $\forall t \in \mathbb{T}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \forall \mathbf{u}(t) \in \mathbb{U}(t)$

$$\forall i \quad D^\pm \omega_i(t) \leq \min_{x_i = \omega_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{et} \quad \max_{x_i = \Omega_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq D^\pm \Omega_i(t)$$

$$\omega(t_0) \leq \mathbf{x}(t_0) \leq \Omega(t_0) \Rightarrow \forall t \in \mathbb{T}, \quad \omega(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \Omega(t)$$

Etendre la règle de construction \rightarrow calcul couplé des bornes

Exemple d'applications. Théorèmes de comparaison

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Système non linéaire incertain

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{v_2 x_1}{k_2 + x_1} + v_0 u + v_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{v_6 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_6 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_3 x_1 x_2}{k_3 + x_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{v_4 x_1 (y_{tot} - x_2 - x_3)}{k_4 + (y_{tot} - x_2 - x_3)} - \frac{v_5 x_3}{k_5 + x_3} \\ \dot{x}_4 = \frac{v_1 0 (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_1 0 + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_7 x_3 x_4}{k_7 + x_4} \\ \dot{x}_5 = \frac{v_8 x_3 (z_{tot} - x_4 - x_5)}{k_8 + (z_{tot} - x_4 - x_5)} - \frac{v_9 x_5}{k_9 + x_5} \\ u = g x_5 \end{array} \right.$$

Exemple d'applications. Théorèmes de comparaison

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

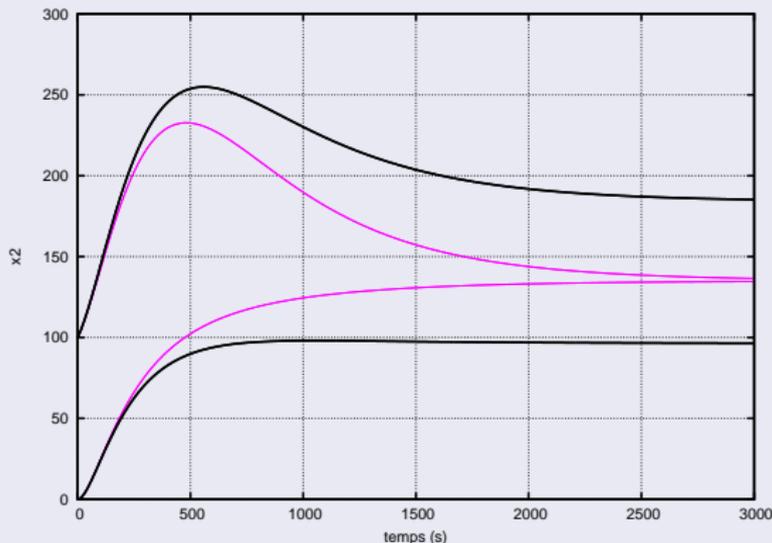
Enveloppe du tube de trajectoire \rightarrow Système couplé

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{\bar{v}_2 x_1}{k_2 + x_1} + v_0 u + v_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{v_6 (y_{tot} - x_2 - \bar{x}_3)}{k_6 + (y_{tot} - x_2 - \bar{x}_3)} - \frac{v_3 \bar{x}_1 x_2}{k_3 + x_2} \\ \dot{x}_3 = \frac{v_4 x_1 (y_{tot} - \bar{x}_2 - x_3)}{k_4 + (y_{tot} - \bar{x}_2 - x_3)} - \frac{v_5 x_3}{k_5 + x_3} \\ \dot{x}_4 = \frac{v_1 0 (z_{tot} - x_4 - \bar{x}_5)}{k_1 0 + (z_{tot} - x_4 - \bar{x}_5)} - \frac{v_7 \bar{x}_3 x_4}{k_7 + x_4} \\ \dot{x}_5 = \frac{v_8 x_3 (z_{tot} - \bar{x}_4 - x_5)}{k_8 + (z_{tot} - \bar{x}_4 - x_5)} - \frac{v_9 x_5}{k_9 + x_5} \\ \dot{\bar{x}}_1 = -\frac{v_2 \bar{x}_1}{k_2 + \bar{x}_1} + \bar{v}_0 \bar{u} + \bar{v}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 = \frac{\bar{v}_6 (\bar{y}_{tot} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)}{k_6 + (\bar{y}_{tot} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)} - \frac{v_3 \bar{x}_1 \bar{x}_2}{k_3 + \bar{x}_2} \\ \dot{\bar{x}}_3 = \frac{\bar{v}_4 \bar{x}_1 (\bar{y}_{tot} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)}{k_4 + (\bar{y}_{tot} - \bar{x}_2 - \bar{x}_3)} - \frac{v_5 \bar{x}_3}{k_5 + \bar{x}_3} \\ \dot{\bar{x}}_4 = \frac{\bar{v}_1 0 (\bar{z}_{tot} - \bar{x}_4 - \bar{x}_5)}{k_1 0 + (\bar{z}_{tot} - \bar{x}_4 - \bar{x}_5)} - \frac{v_7 \bar{x}_3 \bar{x}_4}{k_7 + \bar{x}_4} \\ \dot{\bar{x}}_5 = \frac{\bar{v}_8 \bar{x}_3 (\bar{z}_{tot} - \bar{x}_4 - \bar{x}_5)}{k_8 + (\bar{z}_{tot} - \bar{x}_4 - \bar{x}_5)} - \frac{v_9 \bar{x}_5}{k_9 + \bar{x}_5} \\ \frac{u}{\bar{u}} = \frac{g x_5}{g \bar{x}_5} \end{array} \right.$$

Exemple d'applications. Théorèmes de comparaison

Modèle de biologie moléculaire (*Mitogen-Activated Protein Kinase cascades*)

Enveloppe du tube de trajectoire



Plan

- 1 Contexte
- 2 Méthodes intervalles
 - Modèles de Taylor intervalles
 - Autres méthodes
 - Exemples d'applications de méthodes de Taylor intervalles
- 3 Théorèmes de comparaison et inégalités différentielles
 - Systèmes dynamiques monotones
 - Systèmes dynamiques non coopératifs
 - Exemples d'applications
- 4 Conclusion et Perspectives

Directions de recherches - Théorèmes de comparaison

Systèmes monotones → une bonne méthode

- Automates hybrides englobants (Meslem et al, JDMACS2007)
- Méthodes intervalles → bornes
- Combinatoire des règles de construction
- Instantiation à la volée des modes

Systèmes non monotones → Théorème de Müller

- Interpolation certifiée, propagation de contraintes et partitionnement
- Transformation de systèmes non monotones en systèmes monotones